

BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA
DE MATEMÀTIQUES
Institut d'Estudis Catalans

_ í n d e x _

- ☐ *Joana Cirici*
Contribucions de Maryam Mirzakhani en geometria i dinàmica 87
- ☐ *Josep Pla i Carrera*
Lectura metodològica i històrica de l'obra *Ḥibbur ha-mēšīḥá wē-ha-tišboret* (Tractat de geometria i mesurament),
d'Abraham Bar Ḥiyya (Savasorda) 111
- ☐ *Xavier Ros-Oton i Joaquim Serra*
Regularitat i singularitats en problemes de frontera lliure 155
- ☐ English summaries 177



Volum 35 • Número 2 • Any 2020



Institut
d'Estudis
Catalans

BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA

DE MATEMÀTIQUES

Institut d'Estudis Catalans

Volum 35 • Número 2 • Desembre 2020

BARCELONA
2020

© dels autors dels articles

Editat per la Societat Catalana de Matemàtiques
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carrer del Carme, 47
08001 Barcelona

Text revisat lingüísticament
per la Unitat de Correcció del Servei Editorial de l'IEC

Imprès a Ediciones Gráficas Rey, SL

ISSN: 0214-316-X

Dipòsit Legal: B 19272-1987

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del *copyright*, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment i suport, incloent-hi la reprografia i el tractament informàtic, la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec comercial, la inclusió total o parcial en bases de dades i la consulta a través de xarxa telemàtica o d'Internet. Les infraccions d'aquests drets estan sotmeses a les sancions establertes per les lleis.

Índex

JOANA CIRICI	
Contribucions de Maryam Mirzakhani en geometria i dinàmica	87
JOSEP PLA I CARRERA	
Lectura metodològica i històrica de l'obra <i>Ḥibbur ha-měšiḥá wě-ha-tišboret</i> (<i>Tractat de geometria i mesurament</i>), d'Abraham Bar Ḥiyya (Savasorda)	111
XAVIER ROS-OTON I JOAQUIM SERRA	
Regularitat i singularitats en problemes de frontera lliure	155
English summaries	177

Contribucions de Maryam Mirzakhani en geometria i dinàmica

JOANA CIRICI

Resum: Ens endinsarem en el món de les superfícies de Riemann, les mètriques hiperbòliques i les corbes geodèsiques per explorar alguns dels treballs de Maryam Mirzakhani que combinen, de forma sorprenent, conceptes de dinàmica i geometria. Veurem com comptar geodèsiques en superfícies usant espais de moduli i com podem adreçar problemes en dinàmica de billars mitjançant l'estudi de corbes geodèsiques en superfícies. També revisarem alguns dels últims descobriments de Mirzakhani, com és el teorema de la vareta màgica, considerat per alguns el teorema de la dècada.

Paraules clau: Maryam Mirzakhani, superfícies de Riemann, espais de moduli, mètriques hiperbòliques, corbes geodèsiques, dinàmica de billars.

Classificació MSC2010: 01A70, 32G15.

1 Introducció

Maryam Mirzakhani va rebre la Medalla Fields l'any 2014 «per les seves contribucions excepcionals a la dinàmica i la geometria de les superfícies de Riemann i els seus espais de moduli». Mirzakhani va ser la primera dona a rebre aquesta distinció en els seus vuitanta anys d'història.

En aquest text ens endinsarem en el món de les superfícies de Riemann per desvelar algunes d'aquestes contribucions excepcionals. Explicarem resultats de la tesi doctoral de Mirzakhani sobre el comptatge de corbes geodèsiques en superfícies, i com les seves eines permeten jugar a la *loteria topològica*. També revisarem alguns dels seus últims descobriments revolucionaris en dinàmica i geometria, com és el *teorema de la vareta màgica*, considerat per alguns el teorema de la dècada. Veurem que per jugar a billar el millor és estudiar geodèsiques en superfícies, i que les mateixes tècniques ens serviran per il·luminar casa nostra amb una sola bombeta.

Nascuda a Teheran el 1977, des de molt jove Mirzakhani ja va brillar científicament. Va ser la primera noia iraniana a participar en l'Olimpíada Internacional

de Matemàtiques, i va aconseguir dues medalles d'or en les edicions del 1994 (Hong Kong) i 1995 (Toronto). En aquest període va publicar els primers articles sobre combinatòria. El 2004 va obtenir el títol de doctora en matemàtiques per la Universitat de Harvard. La seva tesi, *Simple geodesics on hyperbolic surfaces and the volume of the moduli space of curves*, va donar lloc a tres articles estellars [9, 8, 11]. Aquests treballs destaquen pel fet de posar en joc un gran nombre de tècniques noves i extremament generals en geometria algebraica, diferencial i simplèctica, topologia i dinàmica, entre d'altres. En particular, contenen avenços importants en la teoria de les superfícies de Riemann, que solucionen el problema de comptar corbes geodèsiques en aquestes superfícies i que donen lloc, de forma inesperada, a una nova prova de la conjectura de Witten.

Els treballs de Mirzakhani posteriors a la seva tesi se centren principalment en dinàmica d'espais geomètrics. En particular, Mirzakhani demostra una important conjectura de Bill Thurston sobre terratrèmols matemàtics [10]. El 2014, juntament amb Alex Eskin i amb la col·laboració posterior d'Amir Mohammadi, Mirzakhani va culminar la prova d'una conjectura molt buscada sobre la dinàmica dels espais de moduli [5, 4]. Els seus resultats revelen que la dinàmica dels espais homogenis és extrapolable a un món totalment no homogeni, i obre així una nova mina d'or que molts tardaran dècades a explotar.

Maryam Mirzakhani va morir de càncer de mama el juliol del 2017, a l'edat prematura de quaranta anys. Les seves matemàtiques segueixen vives.

2 Comptant geodèsiques en superfícies

Començarem establint un primer contacte amb els personatges principals d'aquestes notes, per motivar així l'estudi de les corbes geodèsiques en superfícies amb problemes tangibles de probabilitats topològiques i dinàmica de billars.

2.1 Superfícies de Riemann hiperbòliques

Les superfícies topològiques compactes i orientables són espais que localment tenen l'aspecte del pla euclidià i es classifiquen pel seu gènere. Per a gènere 0 tenim l'esfera $\mathbb{S}^2$, per a gènere 1 el tor $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, i per a gènere $g \geq 2$ una suma connexa de g tors, com mostra la figura 1.

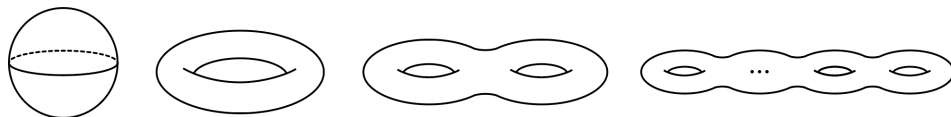


FIGURA 1: Superfícies compactes i orientables.

Un cop establerta aquesta classificació, ens podem preguntar per les diferents estructures geomètriques que admet cada superfície. Un resultat clàssic

per restringir la geometria de les superfícies és el teorema de Gauss-Bonnet, que relaciona la característica d'Euler d'una superfície amb la curvatura associada a una estructura riemanniana en aquesta superfície. En particular, ens diu que per tenir una *mètrica hiperbòlica* (mètrica riemanniana de curvatura constant negativa) cal que el gènere de la superfície sigui $g \geq 2$. En un dels exemples més simples, el teorema de Gauss-Bonnet ens diu que la suma dels angles d'un triangle en el pla (superfície de curvatura 0) és de 180 graus. En canvi, si considerem un triangle geodèsic en una superfície de curvatura positiva, la suma dels angles serà major, mentre que en el cas de curvatura negativa no arribarà a 180 graus (figura 2). Resulta pràctic imaginar que, si visquéssim en una superfície hiperbòlica, experimentaríem cada lloc com si fos un punt de sella.

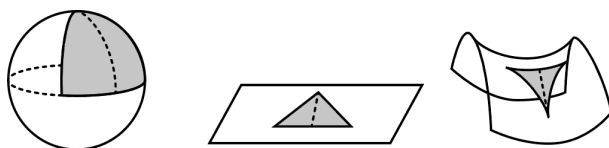


FIGURA 2: Curvatures esfèrica, plana i hiperbòlica.

Les superfícies hiperbòliques són les actrius principals de les obres de Mirzakhani, que n'estudia les geodèsiques.

2.2 Corbes geodèsiques

La noció de *geodèsica* té sentit en qualsevol varietat diferencial dotada d'una mètrica. Generalitzant les línies rectes en l'espai pla, una *geodèsica* és una corba que localment minimitza la seva longitud. Per exemple, la trajectòria d'una massa que cau, un satèl·lit en òrbita o la figura que dibuixa una òrbita planetària són tot geodèsiques en l'espai-temps corbat. En l'esfera, les geodèsiques són els cercles màxims i sempre són tancades (figura 3).

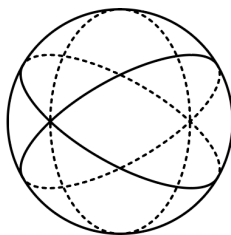


FIGURA 3: Geodèsiques en l'esfera.

Per visualitzar les geodèsiques del tor pla, el més convenient és considerar la seva representació quocient, com en la figura 4. Tota recta en el pla dona lloc a una geodèsica en el tor. Si l'angle entre la recta i l'eix horitzontal és un

nombre racional, aleshores definirà una geodèsica tancada (figura 5). En cas contrari, la nostra geodèsica acabarà pintant tot el tor i direm que la geodèsica és *densa*.

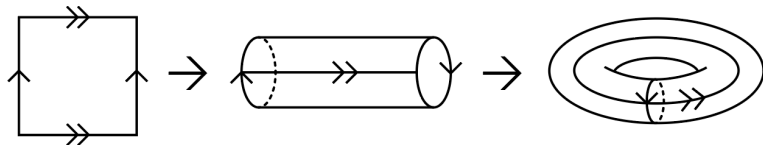


FIGURA 4: Representació plana del tor: per a construir-lo, identifiquem arestes paral·leles d'un rectangle.

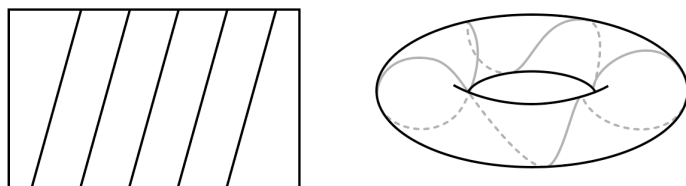


FIGURA 5: Exemple de corba geodèsica tancada en el tor.

Una propietat especial de les superfícies hiperbòliques (de gènere $g \geq 2$) és que tota corba tancada no trivial és homotòpica a una única geodèsica. A més, hi ha un nombre finit de geodèsiques tancades de longitud $\leq \ell$.

Aquests fets permeten estudiar-ne el comportament asimptòtic. El teorema dels nombres primers per a superfícies, establert el 1940 a partir de treballs de Delsarte, Huber i Selberg, afirma que el nombre $N(X, \ell)$ de geodèsiques tancades de longitud $\leq \ell$ en una superfície hiperbòlica X es comporta com a

$$N(X, \ell) \sim e^\ell / \ell \quad \text{quan } \ell \rightarrow \infty.$$

Observem que el teorema de nombres primers clàssic dona el mateix creixement per al nombre d'enters primers p amb $0 \leq \log p \leq \ell$.

Ara bé, gairebé totes les corbes autointersequen. Si només comptem geodèsiques *simples* (sense autointerseccions), Rees i Rivin van provar, de forma independent, que el seu nombre creix de forma polinòmica en ℓ . En el marc de la seva tesi doctoral, Mirzakhani va anar molt més enllà i va donar una fórmula explícita: prova que el nombre $N(X, \ell)$ de geodèsiques tancades i simples de longitud $\leq \ell$ en una superfície hiperbòlica X es comporta com a

$$N(X, \ell) \sim C_X \cdot \ell^{6g-6} \quad \text{quan } \ell \rightarrow \infty.$$

Observem que el comportament asimptòtic en el cas general és independent del gènere de la superfície, mentre que, en el cas de les geodèsiques simples, no només l'exponent de ℓ depèn del gènere, sinó que C_X és una constant

que depèn fortament de la geometria de X . De fet, l'estratègia de Mirzakhani consisteix a estudiar la geometria i topologia d'una superfície donada a partir de la geometria de l'*espai de moduli* que la parametrilitza. En certa manera, és com deduir el comportament de les abelles a partir de les propietats dels seus ruscs. Presentarem aquests espais de moduli a la secció 3.

2.3 Estadística topològica

Entendre les geodèsiques simples ens pot donar informació de la mateixa superfície a partir de les possibles descomposicions que admet. Per a una mètrica hiperbòlica fixada en una superfície de gènere g , sempre hi ha una descomposició en pantalons, que talla la superfície al llarg d'una col·lecció de $3g - 3$ geodèsiques tancades, simples i disjunts, com en la figura 6.

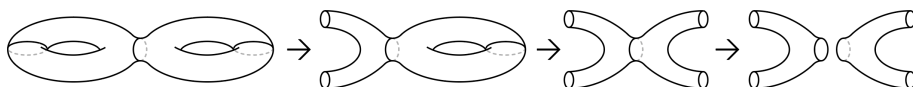


FIGURA 6: Una descomposició del doble tor.

La descripció geomètrica d'aquesta descomposició depèn clarament de les geodèsiques escollides. Una pregunta natural és, doncs:

Quantes descomposicions diferents (no homotòpiques) hi ha?

Les descomposicions són infinites sempre que es tracti de geodèsiques simples de longitud arbitrària, però no si restringim aquesta longitud. Les tècniques de Mirzakhani són suficientment delicades per extreure freqüències de creixement de corbes de determinats *tipus topològics* i provar que aquestes freqüències són sempre nombres racionals i independents de la mètrica hiperbòlica escollida.

Per exemple, considerem una superfície de gènere 2 i ens preguntem pels diferents tipus topològics que generen les geodèsiques simples i tancades, com en la figura 7. Considerem una corba geodèsica i simple arbitrària en aquesta

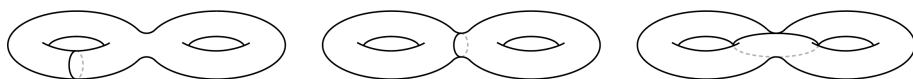


FIGURA 7: Tipus topològics de corbes en el doble tor.

superfície. Mirzakhani calcula que la probabilitat que aquesta corba separi el doble tor en dues superfícies de gènere 1 és $1/49$.¹ Revisarem aquests resultats sorprenents a la secció 4 en un context més general.

Les eines desenvolupades per Mirzakhani per al comptatge de corbes i freqüències asimptòtiques donen lloc, inesperadament, a una nova prova de

¹ De fet, en els càlculs inicials de Mirzakhani [11] el resultat és $1/7$. Recentment, a [2] s'indica que una petita errada faria variar els resultats en un factor 8 en les proporcions (d'1 : 6 a 1 : 48), i es comprova el resultat de forma experimental.

la conjectura de Witten, provada inicialment per Maxim Kontsevich el 1992 usant mètodes completament diferents. En una sola fórmula, la conjectura de Witten relaciona conceptes de geometria algebraica enumerativa, combinatòria, sistemes integrables i física quàntica amb conseqüències de molt relleu en la teoria de la gravetat quàntica.

2.4 Dinàmica i billars poligonals

Un *sistema dinàmic* és un sistema que evoluciona amb el temps. Es pot tractar d'un conjunt de partícules de gas confinades en un recipient, un sistema planetari, corrents oceànics, electrons en un metall o l'expansió d'un virus. En general, els sistemes dinàmics són caòtics i interessa determinar-ne el comportament asimptòtic o l'evolució de les trajectòries per a temps llargs. D'altra banda, sistemes de diferents escales solen comportar-se de forma similar. Així, resulta útil estudiar models simplificats per tal d'entendre el comportament de processos més complexos. Un model per excel·lència són les *taules de billar* com a exemples de sistemes dinàmics caòtics que modelen la mecànica hamiltoniana.

Ens restringirem a *billars poligonals* (figura 8), on la bola és una partícula puntual que es mou en línia recta i velocitat constant fins que topa amb una de les arestes del polígon. Aleshores la partícula experimenta una reflexió especular i surt reflectida amb el mateix angle que el d'incidència. Si la partícula topa amb un vèrtex del polígon, la trajectòria acaba (podem pensar que la bola ha caigut en un forat).

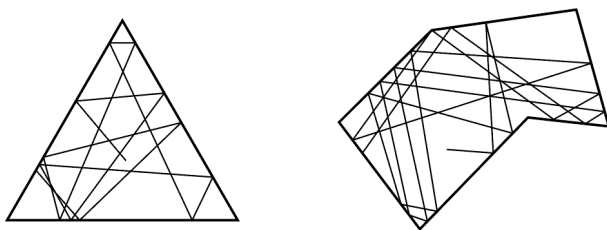


FIGURA 8: Taules de billar poligonals.

Les trajectòries poden tenir comportaments molt diferents. Per exemple, es pot donar el cas que la trajectòria sigui *tancada*, és a dir, que en un moment determinat la nostra partícula recuperi la posició i direcció inicials. També es parla de trajectòries *denses*: són aquelles trajectòries que, amb temps infinit, acaben pintant tota la superfície del polígon. Algunes primeres preguntes que ens podem fer són:

Hi ha trajectòries tancades? Hi ha trajectòries denses? Depèn de la taula?

Se sap que per a *polígons racionals* (en què tots els angles són múltiples racionals de π), sempre hi ha almenys una trajectòria tancada. En canvi, no se sap si tota taula triangular té trajectòries tancades o no. També ens podem

preguntar si hi ha *billars òptims* tals que tota trajectòria és o bé tancada, o bé equidistribuïda (que no es quedi pintant de forma densa un racó del nostre polígon mentre la resta queda buida). Se sap que els polígons regulars són òptims, però en general resulta altament complicat decidir si una taula és òptima o no.

Relacionats amb aquestes qüestions hi ha els *problemes d'il·luminació*. Considerem en aquest cas una habitació poligonal emmirallada (figura 9). Disposem d'una única espelma (font puntual de llum), que podem col·locar en qualsevol punt de l'interior de la nostra habitació. Els raigs de llum surten de la font radialment en totes direccions i reboten a les parets emmirallades seguint les lleis de l'òptica geomètrica, en què, com en el cas dels billars, l'angle de reflexió coincideix amb l'angle d'incidència.

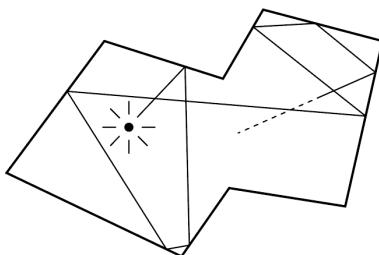


FIGURA 9: Habitació poligonal emmirallada amb una font lumínica puntual.

Un altre cop hi ha diverses preguntes naturals per fer-se:

Podem il·luminar la nostra habitació amb una sola espelma? Hi ha punts foscos? Què en podem dir, del conjunt de punts foscos? Depèn de l'habitació? Depèn del punt on posem l'espelma?

Evidentment, aquestes preguntes només tenen interès en el cas d'habitacions no convexes. Un exercici entretingut és provar que una habitació formada per 5 quadrats com en la figura 10 sempre es pot il·luminar. En canvi, construir habitacions no il·luminables és una tasca difícil.

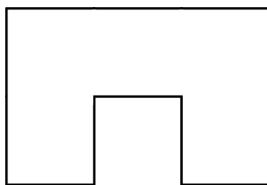


FIGURA 10: Exemple d'habitació il·luminable.

El 1995 George Tokarsky va donar els primers exemples d'habitacions amb punts foscos. El més senzill, un polígon de 26 costats (figura 11). El problema de caracteritzar el conjunt de punts foscos d'una taula arbitrària segueix obert.

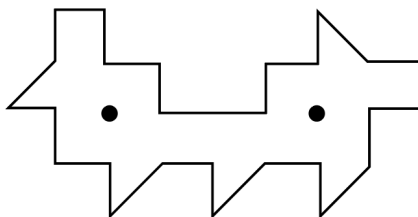


FIGURA 11: Polígon de Tokarsky: no hi ha cap trajectòria entre els dos punts marcats.

Una variant dels problemes d'il·luminació són els *problemes de seguretat*.

Podem bloquejar totes les trajectòries entre dos punts d'una habitació poligonal mitjançant un nombre finit de barreres puntuals?

Se sol representar un dels punts donats pel president i l'altre punt per un terrorista. Aleshores la pregunta és si podem assegurar el president amb un nombre finit de guardaespalles. Si això passa per a tot parell de punts, diem que el polígon és *segur*. Per exemple, un exercici entretingut és provar que el quadrat és un polígon segur.

2.5 Desplegament de polígons

Continuem jugant a billar i a il·luminar, però ara, en comptes de reflectir la bola de billar o la llum de l'espelma, el que farem és reflectir la taula o l'habitació, de manera que la trajectòria de la bola o dels raigs de llum siguin línies rectes. Aquest procés de *desplegament* es pot iterar a cada reflexió i té moltíssimes aplicacions en la teoria dels sistemes dinàmics de billars poligonals. Ens restringirem, però, al cas de *billars poligonals racionals* (en què tots els angles són múltiples racionals de π). En aquest cas, el procés de desplegament dona lloc a superfícies compactes i les trajectòries no són més que geodèsiques tancades en aquestes superfícies!

Comencem amb un exemple molt senzill. Tenim una taula quadrada com en la figura 12 i llancem una bola de billar. Quan la bola toqui la paret, creem una còpia reflectida de la taula, de manera que la bola segueixi en línia recta. Això ho podem fer successivament i amb diferents trajectòries.

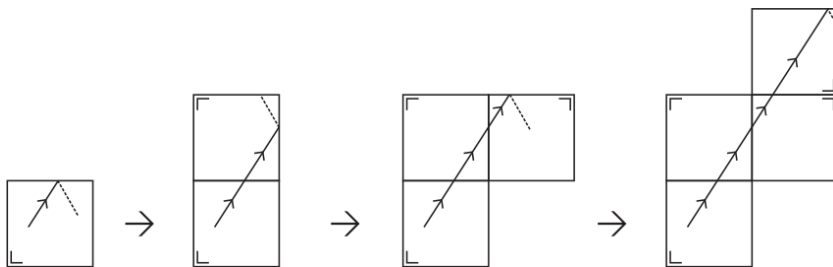


FIGURA 12: Reflexions en una taula quadrada.

Observem, però, que només hi ha quatre reflexions diferents de la nostra taula, ja que és quadrada. Podem, doncs, identificar reflexions idèntiques, de manera que obtenim un tor, com en la figura 13. Així, la nostra trajectòria es tradueix en una geodèsica en aquest tor.

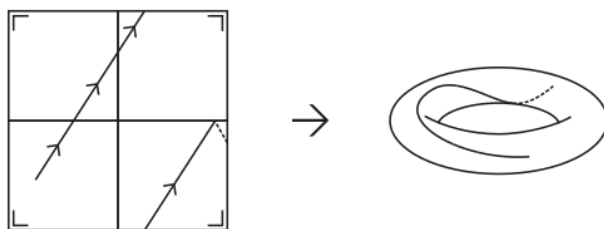


FIGURA 13: Desplegant una taula quadrada obtenim un tor.

Vegem un altre exemple de desplegament. Considerem un triangle isòsceles amb un angle de 45° , com en la figura 14. En aquest cas, una trajectòria genèrica es pot moure en 8 direccions possibles. La taula triangular es desplega formant un octàgon regular en el qual hem d'identificar arestes dues a dues, i s'obté un doble tor.

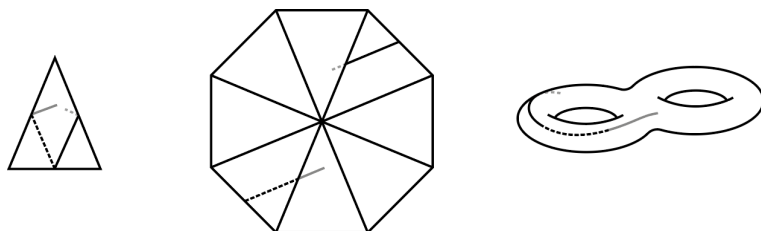


FIGURA 14: Desplegant una taula triangular obtenim un doble tor.

El desplegament de taules permet traduir problemes de billars, d'il·luminació i de seguretat a l'estudi de corbes geodèsiques en superfícies. Una conjectura clàssica per a taules poligonals racionals T és que el nombre $N(T, \ell)$ de trajectòries tancades de longitud $\leq \ell$ es comporta com a

$$N(T, \ell) \sim \frac{C_T \cdot \ell^2}{\pi \cdot \text{Area}(T)},$$

on C_T és una constant que depèn de la taula T . Mirzakhani, juntament amb Alex Eskin, progressa cap a aquest resultat, i prova que el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(T, \ell) / \ell^2$$

existeix i és diferent de zero. Una conseqüència d'aquest resultat és que en tota habitació emmirallada poligonal racional només hi ha un nombre finit de punts

foscós, independentment d'on colloquem l'espelma. Aquest resultat no és més que un petit corollari d'un resultat molt més general, conegut com el *teorema de la vareta màgica*, sobre la dinàmica en espais de moduli de les superfícies de Riemann i que comentarem al final d'aquest text.

3 Espais de moduli de les superfícies de Riemann

L'estratègia de Mirzakhani per entendre una sola superfície i el comportament de les geodèsiques en aquesta consisteix a mirar totes les superfícies alhora, amb l'ajuda dels espais de moduli. En aquesta secció introduïrem aquests espais i les seves dues personalitats: com a varietat algebraica complexa i com a entitat simplèctica.

3.1 Problemes de classificació i espais de moduli

Un *espai de moduli* és un espai de solucions de problemes de classificació, entenent el terme *modulus* com a sinònim de *paràmetre*.

Una propietat clau dels espais de moduli és que sovint hereten estructures topològiques i geomètriques dels objectes que parametritzen. Per exemple, el conjunt de les rectes del pla $\mathbb{R}^2$ que passen per l'origen es pot parametritzar amb un sol angle $0 \leq \theta < \pi$. Ara bé, si dotem l'interval $[0, \pi)$ d'una topologia fidel al fet que les rectes d'angle proper a π s'acosten de forma contínua a la recta horitzontal, obtenim la recta real projectiva $\mathbb{RP}^1$, que és, a més d'espai topològic i varietat algebraica projectiva, una varietat diferenciable.

Centrarem la nostra atenció en el que potser és la família més famosa d'espais de moduli. Denotats per $\mathcal{M}_{g,n}$, aquests espais es defineixen com el conjunt de les superfícies de Riemann de gènere g amb n punts marcats, llevat d'isomorfisme:

$$\mathcal{M}_{g,n} := \left\{ \begin{array}{c} \text{Superfícies de Riemann} \\ \text{de gènere } g \\ \text{amb } n \text{ punts marcats} \end{array} \right\} / \cong .$$

Les superfícies de Riemann són superfícies topològiques dotades de certa estructura geomètrica complexa que precisarem més endavant. Històricament, les primeres superfícies de Riemann van sorgir en l'estudi, de la mà de Bernhard Riemann, de les funcions analítiques multiavaluades, com són $\sqrt{z}$ o $\log(z)$, mitjançant tècniques de continuació analítica. Els punts marcats aquí els hem d'entendre de forma literal: distingim n punts diferents de la superfície i els ordenem.

El conjunt $\mathcal{M}_{g,n}$ té una rica estructura topològica i geomètrica. En primer lloc, és una varietat algebraica complexa de dimensió real

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{g,n} = 6g - 6 + 2n. \quad (1)$$

D'altra banda, tot i que presenta singularitats moderades, té una estructura simplèctica (que permet calcular volums). La dimensió d'aquests espais ja era coneguda per Riemann. Les primeres construccions rigoroses d'aquest conjunt com a entitat geomètrica les van donar Ahlfors i Bers, seguint les passes de Teichmüller. Els espais de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ i altres objectes relacionats apareixen principalment en geometria algebraica i diferencial, però també tenen papers interessants en aritmètica, topologia, dinàmica i fins i tot en teoria de cordes:

- Les corbes modulars, fonamentals en teoria de nombres, admeten una interpretació directa en termes d'espais de moduli de corbes el·líptiques.
- En topologia, els espais de moduli s'identifiquen amb espais classificadors. Recurrents en teoria d'homotopia, els espais de moduli permeten aplicacions interessantíssimes en l'estudi d'àlgebres homotòpiques relacionades amb invariants quàntics inspirats en idees d'origen físic.
- Els espais de moduli han estat un ingredient crucial en teoria de cordes des d'un bon principi, en què la funció de partició de les cordes bosòniques s'integra sobre aquests espais.
- L'estudi de certs grups algebraics que actuen en els espais de moduli, així com els seus fluxos geodèsics, tenen nombroses aplicacions en dinàmica, com descobrirem més endavant.

Abans de descriure la teoria de les superfícies de Riemann i els seus espais de moduli amb certa generalitat, revisarem els dos casos més senzills, corresponents a l'esfera i el tor.

3.2 L'esfera de Riemann

Per fabricar-nos l'esfera de Riemann, considerem el pla complex $\mathbb{C}$ i hi afegim el punt de l'infinit

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Topològicament, estem fent la compactificació per un punt del pla, i, per tant, obtenim una esfera $\mathbb{S}^2$. Aquesta construcció ens regala, a més d'una superfície topològica compacta, una rica estructura geomètrica que apareix en diverses branques de les matemàtiques i de la física:

- En anàlisi complexa, l'esfera de Riemann hi té un paper fonamental, en tant que tota funció racional amb valors complexos s'estén a una funció holomorfa en $\hat{\mathbb{C}}$ (enviant els pols de la funció al punt ∞ de $\hat{\mathbb{C}}$). Més generalment, tota funció meromorfa es pot pensar com una funció holomorfa que té l'esfera de Riemann com a codomini.
- En geometria algebraica, l'esfera de Riemann s'identifica amb la recta projectiva complexa $\mathbb{CP}^1$. Aquesta varietat algebraica es pot considerar com la llavor de la geometria algebraica projectiva, fonamental en l'estudi de les corbes racionals.

- En mecànica quàntica, l'esfera de Riemann (figura 15) es coneix amb el nom d'*esfera de Bloch* i s'utilitza, entre d'altres, per representar geomètricament els bits quàntics. En aquest cas, els punts 0 i ∞ de $\hat{\mathbb{C}}$ s'identifiquen amb els estats *spin-up* i *spin-down* d'un electró. Així, podem pensar que un ordinador quàntic està format per un sistema d'esferes de Riemann que interaccionen entre elles.

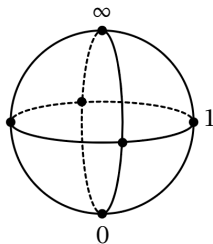


FIGURA 15: Esfera de Riemann.

Els punts de l'espai de moduli $\mathcal{M}_{0,n}$ són esferes de Riemann amb n punts marcats, llevat d'isomorfisme. Per veure quantes classes d'isomorfisme hi ha, tindrem en compte el fet que els automorfismes de l'esfera de Riemann venen donats pel *grup de Möbius*, definit per transformacions

$$f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \text{ de la forma } f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

on a, b, c, d són nombres complexos tals que $ad - bc \neq 0$, i amb el conveni que

$$f(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{i} \quad f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty.$$

Un exercici senzill consisteix a provar que, donats tres punts diferents de $\hat{\mathbb{C}}$, sempre hi ha una transformació de Möbius que envia aquests tres punts als punts especials 0, 1 i ∞ . A més, tota transformació que fixa els tres punts $\{0, 1, \infty\}$ és la identitat. Com a conseqüència, l'espai de moduli de superfícies de gènere 0 amb tres punts marcats és força trivial:

$$\mathcal{M}_{0,3} = \{*\}.$$

En el cas de quatre punts marcats $\{x, y, z, t\}$ de $\hat{\mathbb{C}}$, raonant com al cas anterior, podem fixar tres dels punts, de manera que $x = 0$, $y = 1$ i $z = \infty$, i ens quedarà un paràmetre lliure $t \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$. L'espai de moduli $\mathcal{M}_{0,4}$ és l'espai que defineix aquest paràmetre t . Obtenim, doncs:

$$\mathcal{M}_{0,4} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

De manera anàloga, per a tot $n \geq 3$ obtenim:

$$\mathcal{M}_{0,n} = \{(t_1, \dots, t_{n-3}) \in \hat{\mathbb{C}}^{n-3}; t_i \neq 0, 1, \infty, t_i \neq t_j\}.$$

Veiem, doncs, que la dimensió complexa de $\mathcal{M}_{0,n}$ és $n - 3$ i, per tant, la dimensió real és $2n - 6$, d'acord amb l'equació (1).

Observem que, si consideréssim menys de tres punts marcats, aleshores obtindríem espais de moduli de dimensions negatives. Així, per $n \leq 2$ l'espai de moduli $\mathcal{M}_{0,n}$ té sentit com a conjunt, però no com a entitat geomètrica, i la seva utilitat en aquests casos és dubtosa.

3.3 Tors complexos

Com en el cas de l'esfera de Riemann, ens fabricarem tors complexos a partir del pla complex $\mathbb{C}$. En aquest cas, el que farem és considerar un reticle enter $\Lambda \cong \mathbb{Z}^2$ i farem el quocient de $\mathbb{C}$ per aquest reticle. De fet, resulta suficient considerar reticles de la forma $\Lambda_\tau := \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, on τ és un generador complex amb part imaginària positiva (figura 16), és a dir: τ viu al semiplà de Poincaré

$$\mathbb{H} := \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}.$$

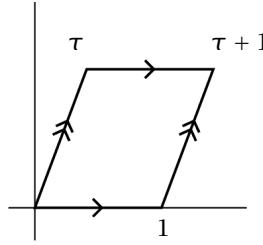


FIGURA 16: Reticle generat per $(1, \tau)$, amb $\tau \in \mathbb{H}$.

Així, llevat d'isomorfisme, tot tor complex és de la forma

$$\mathbb{T}_\tau^2 := \mathbb{C}/\Lambda_\tau = \{z + \Lambda_\tau; z \in \mathbb{C}\}$$

i tot punt de $\mathbb{T}_\tau^2$ és una classe d'equivalència d'elements de $\mathbb{C}$ per la relació

$$z \sim z' \iff \text{hi ha } n, m \in \mathbb{Z}; z = z' + n + m\tau.$$

Topològicament obtenim un tor. Però, com en el cas de l'esfera de Riemann, aquesta construcció ens regala una estructura geomètrica. Algebraicament, un tor complex és un grup abelià amb la suma que hereta de $\mathbb{C}$. De fet, la teoria dels tors complexos està fortament lligada a les *corbes el·líptiques* (corbes amb una estructura de grup) en el sentit que tota corba el·líptica és analíticament isomorfa a un tor complex. Les corbes el·líptiques apareixen en àrees tan diverses com la teoria de nombres, l'anàlisi complexa, la criptografia o la física matemàtica.

Observem que el tor $\mathbb{T}_\tau^2$ té per defecte un punt marcat: la imatge de $0 \in \mathbb{C}$. D'altra banda, si dos reticles satisfan $\Lambda = \lambda \cdot \Lambda'$, on $\lambda \in \mathbb{C}^*$, obtenim tors isomorfs. Per tant, com a conjunt obtenim

$$\mathcal{M}_{1,1} = \{\text{reticles}\} / \mathbb{C}^*.$$

Si escollim reticles generats per $(1, \tau)$, on $\tau \in \mathbb{H}$, aleshores dos paràmetres τ i τ' descriuen reticles isomorfs si i només si

$$\tau' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

on la matriu pertany al grup $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ de matrius 2×2 amb determinant 1. Així, una descripció geomètrica de $\mathcal{M}_{1,1}$ ve donada pel quocient

$$\mathcal{M}_{1,1} = \mathbb{H} / \text{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Com en els casos $\mathcal{M}_{0,0}$, $\mathcal{M}_{0,1}$ i $\mathcal{M}_{0,2}$, l'espai de moduli $\mathcal{M}_{1,0}$ sense punts marcats no té sentit com a objecte geomètric.

3.4 Superfícies més generals

Les superfícies de Riemann són el marc natural per estudiar el comportament global de les *funcions holomorfes*: funcions amb valors complexos en una o més variables que són, en tot punt del seu domini, diferenciables com a funcions complexes en tot entorn d'aquest punt. Un criteri per decidir si una funció $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ és holomorfa ve donat per les *equacions de Cauchy-Riemann*: sigui $z = x + iy$ la descomposició d'un nombre complex en les seves parts real i imaginària, i escrivim

$$f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

on P i Q són funcions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Aleshores f és holomorfa si i només si P i Q són diferenciables i satisfan:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Hi ha un criteri anàleg per a les funcions holomorfes $f: U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ en diverses variables. Una conseqüència immediata de les equacions de Cauchy-Riemann és que tota funció holomorfa amb valors reals ha de ser constant. Aquest primer resultat ja indica que la teoria de les funcions holomorfes és molt més rígida que la de les funcions diferenciables en variable real. Aquesta rigidesa es tradueix en resultats dramàtics en geometria.

Podem pensar en les superfícies de Riemann com a versions deformades del pla complex. Amb més precisió, ens cal una superfície topològica X (Hausdorff i amb una base d'entorns numerable) dotada d'un atlas holomorf (figura 17):

un recobriment per oberts $X = \bigcup U_i$ juntament amb cartes $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$ (que siguin homeomorfismes amb la seva imatge) i tal que els canvis de carta

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

siguin funcions holomorfes per tot parell d'oberts tals que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

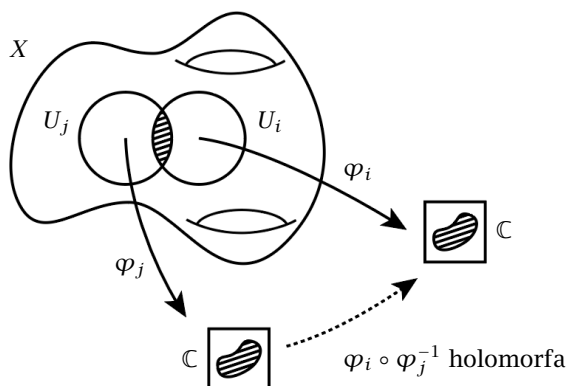


FIGURA 17: Condició d'atles holomorf.

- Per definir un atlas holomorf en l'esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, podem considerar els oberts $U = \mathbb{C}$ i $V = \mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$ i les cartes $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ i $\psi: V \rightarrow \mathbb{C}$ definides per $\varphi(z) = z$ i $\psi(z) = \frac{1}{z}$, respectivament. Per veure que aquestes cartes defineixen un atlas holomorf només cal observar que el canvi de carta $\psi \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ és una funció holomorfa en $\varphi(U \cap V) \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- Per construir el quocient, el tor complex $\mathbb{T}_\tau^2$ hereta de $\mathbb{C}$ un atlas holomorf, de manera que la projecció $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}_\tau^2$ és una aplicació holomorfa.

Dues superfícies de Riemann són *equivalents* si hi ha una equivalència topològica (homeomorfisme) que preserva la geometria (en particular, preserva funcions holomorfes). Més concretament, demanem que hi hagi una aplicació holomorfa i bijectiva entre les superfícies, de manera que la inversa també sigui holomorfa. També es parla de *biholomorfisme*. L'espai de moduli col·lecciona totes les possibles estructures geomètriques complexes per una superfície topològica fixada, llevat d'aquesta equivalència. Si tenim punts marcats, els biholomorfismes han de preservar aquests punts.

Una propietat important de cara a la construcció de l'espai de moduli és que en el cas $2 - 2g - n < 0$ el grup d'automorfismes d'una superfície de Riemann de gènere g amb n punts marcats és finit. En canvi, en els casos $(0, \leq 2)$ o $(1, 0)$ el grup d'automorfismes que preserva els punts marcats és infinit. Aquest fet fa impossible definir-ne els espais de moduli corresponents $\mathcal{M}_{0, \leq 2}$ i $\mathcal{M}_{1, 0}$ com a entitats geomètriques, com ja hem vist amb un càlcul de dimensions.

3.5 Estructures hiperbòliques

Si tenim una superfície topològica de gènere g i li retallem n discs disjunts, obtenim una superfície del mateix gènere, però amb n components de vora, com en la figura 18. La noció d'*atles holomorf* s'adapta a aquest nou context amb petits canvis a les vores. Així, podem considerar superfícies de Riemann amb vora.

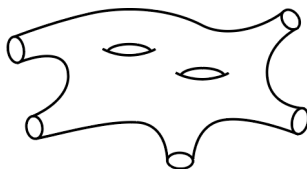


FIGURA 18: Superfície de gènere 2 amb cinc components de vora.

Recordem, d'altra banda, que una *superfície hiperbòlica* és una superfície equipada amb una mètrica riemanniana i completa de curvatura constant negativa. Pel teorema de Gauss-Bonnet, si tenim una superfície de gènere g amb n components de vora i volem que sigui hiperbòlica, caldrà que la característica d'Euler

$$\chi = 2 - 2g - n$$

sigui negativa. Aquesta condició exclou únicament els parells (g, n) donats per $(0, \leq 2)$ i $(1, 0)$, coincidint amb els casos excepcionals pels quals l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ no té significat geomètric. No és casualitat: l'estructura complexa d'una superfície de Riemann defineix una classe conforme de mètriques que, pel teorema d'uniformització, conté una mètrica hiperbòlica sempre que $\chi < 0$. A més, si demanem que la mètrica resultant sigui completa, aleshores aquesta mètrica hiperbòlica és única i dona lloc a una *cúspide* en cada punt marcat. Així, tenim la correspondència següent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Superfícies de Riemann} \\ \text{de gènere } g \text{ i } n \text{ punts marcats} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Mètriques hiperbòliques} \\ \text{en superfícies de gènere } g \\ \text{i } n \text{ cúspides} \end{array} \right\}.$$

Per tant, podem definir l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ com l'espai de mètriques hiperbòliques, on els punts marcats esdevenen cúspides (figura 19). Aquestes cúspides cal pensar-les com a components de vora geodèsiques de longitud zero. En certa manera, el que hem fet és «punxar» la nostra superfície de Riemann en cadascun dels punts marcats per tal de «deixar escapar curvatura», creant singularitats de la mètrica i portant aquestes singularitats a distància infinita.

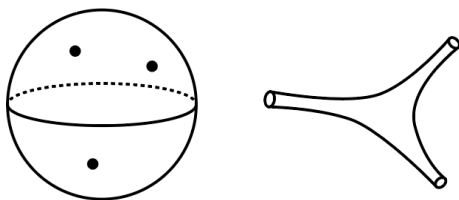


FIGURA 19: Correspondència entre l'esfera de Riemann amb tres punts marcats i els pantalons hiperbòlics.

Una definició alternativa de les superfícies hiperbòliques usa els recobriments per oberts i les cartes que ja hem vist anteriorment per a les superfícies de Riemann. En aquest cas, però, en comptes de $\mathbb{C}$, es demana que les cartes prenguin valors al pla hiperbòlic i que les funcions de transició siguin isometries en comptes de funcions holomorfes. Anem a revisar breument aquest punt de vista més constructiu.

El pla hiperbòlic és el primer exemple de geometria no-euclidiana, en què el postulat de les paral·leles és substituït per:

Donades una recta R i un punt p , tal que $p \notin R$, sempre hi ha almenys dues rectes que passen per p i no tallen R .

Hi ha diversos models equivalents del pla hiperbòlic. Un d'aquests models parteix del semiplà de Poincaré

$$\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C}; y > 0\}$$

que ja hem vist anteriorment, juntament amb la mètrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Un altre model equivalent ve donat pel disc de Poincaré

$$\mathbb{D} := \{x + iy \in \mathbb{C}; x^2 + y^2 < 1\}$$

amb la mètrica

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}.$$

En els dos casos $K = \mathbb{H}$ o $\mathbb{D}$ la longitud d'una corba $\gamma: [a, b] \rightarrow K$ ve donada per

$$\ell_K(\gamma) := \int_{\gamma} ds.$$

Prenent l'ínfim entre les longituds de totes les corbes que uneixen dos punts donats, obtenim una distància en el pla hiperbòlic:

$$d_K(z, w) := \inf_{\gamma} \{\ell_K(\gamma); \gamma: z \rightarrow w\}.$$

Hi ha una isometria entre $\mathbb{D}$ i $\mathbb{H}$ i els dos models són equivalents.

Les corbes geodèsiques en el disc de Poincaré són els diàmetres del disc juntament amb tots els cercles ortogonals a la vora del disc (figura 20).

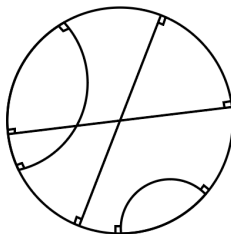


FIGURA 20: Geodèsiques al disc de Poincaré.

Si tenim una superfície topològica recoberta per cartes amb valors al pla hiperbòlic, aleshores aquesta hereta una mètrica hiperbòlica de forma natural. Si el que volem és una superfície hiperbòlica amb *components de vora geodèsiques*, caldrà que les cartes que impliquen la vora prenguin valors a *semiplans tancats* (dominis del pla hiperbòlic retallats al llarg de geodèsiques).

3.6 Polígons en el pla hiperbòlic

Una manera de construir-se un atlas hiperbòlic en una superfície és considerant polígons en el disc de Poincaré. Ja hem vist anteriorment com fabricar el tor identificant les arestes oposades d'un rectangle. Aquest mètode és vàlid en general: qualsevol superfície compacta de gènere g es pot obtenir identificant dues a dues les arestes d'un polígon (figura 21).

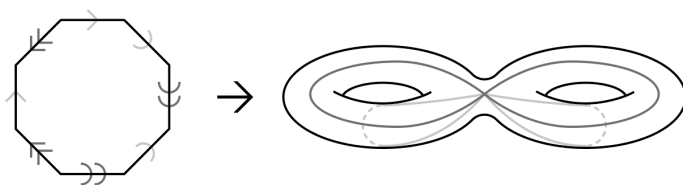


FIGURA 21: Identificant arestes d'un octaèdre obtenim un doble tor.

Anàlogament, si el que volem és obtenir superfícies hiperbòliques, només cal considerar polígons en el pla hiperbòlic, com en la figura 22. Tot polígon regular de $4g$ arestes (que es pot construir amb angles interns de $\pi/2g$) dona lloc a una superfície hiperbòlica de gènere g (en aquest cas sense vora).

Aquesta construcció amaga un resultat més general que afirma que tota superfície hiperbòlica és isomorfa al quocient d'un domini del pla hiperbòlic amb vores geodèsiques per un subgrup discret, cosa que dona lloc a una tercera via per definir i construir les superfícies hiperbòliques.

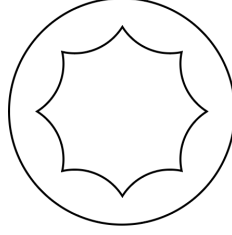


FIGURA 22: Identificant arestes en un polígon en el pla hiperbòlic obtenim superfícies hiperbòliques. En aquest cas, l'octàgon dona lloc a un doble tor.

4 Alguns dels resultats principals de Mirzakhani

En aquesta darrera secció revisarem alguns dels resultats més destacats de Mirzakhani sobre el càlcul de volums en espais de moduli, la conjectura de Witten, càlculs asimptòtics de geodèsiques i el teorema de la vareta màgica.

4.1 Càlcul de volums

Les mètriques hiperbòliques de les superfícies de Riemann indueixen, en l'espai de moduli, una *estructura simplèctica*. Aquesta estructura és, en certa manera, independent de l'estructura complexa de $\mathcal{M}_{g,n}$ i, a grans trets, el que ens dona és una forma de volum que permet integrar sobre l'espai de moduli. Mirzakhani obté fórmules polinòmiques molt precises per a certs volums associades als espais de moduli, com explicarem a continuació.

Donada una superfície de gènere g amb n punts marcats, escollim $3g - 3 + n$ corbes simples tancades que descomponguin la nostra superfície en parells de pantalons. Cadascuna d'aquestes corbes γ_i té associats uns paràmetres de *longitud-twist* $\{\ell_i, \tau_i\}$ que ens diuen com cal enganxar aquests pantalons al llarg de geodèsiques per tal de recuperar la superfície. Aquests paràmetres donen lloc a una *forma simplèctica*

$$\omega := \sum_{i=1}^{3g-3} d\ell_i \wedge d\tau_i.$$

Prenent una potència adequada d'aquesta 2-forma obtenim una *forma de volum*, que permet el càlcul del volum total de l'espai de moduli, entre d'altres.

De forma més general, Mirzakhani considera espais de moduli $\mathcal{M}_{g,n}(\ell_1, \dots, \ell_n)$, on ℓ_i fixen les longituds de les components de vora geodèsiques de cada superfície. Usant mètodes de reducció simplèctica i fórmules complexes per descomposicions de superfícies al llarg de geodèsiques hiperbòliques, Mirzakhani obté un càlcul recursiu del volum d'aquests espais, definit per

$$V_{g,n}(\ell_1, \dots, \ell_n) = \int_{\mathcal{M}_{g,n}(\ell_1, \dots, \ell_n)} \omega^{3g-3+n}.$$

Les fórmules que obté per a aquests volums són polinomis amb coeficients en $\mathbb{Q}(\pi)$ relacionats amb freqüències de classes característiques, en què el terme constant recupera el volum de l'espai de moduli tradicional $\mathcal{M}_{g,n}$. Per exemple, es té

$$V_{1,1}(\ell) = \frac{1}{24}(\ell^2 + 4\pi^2),$$

$$V_{1,2}(\ell_1, \ell_2) = \frac{1}{384}(4\pi^2 + \ell_1^2 + \ell_2^2)(12\pi^2 + \ell_1^2 + \ell_2^2).$$

Els resultats de Mirzakhani sobre els polinomis $V_{g,n}$ formen part del primer article ([8]) derivat de la seva tesi doctoral. Prèviament, només es coneixia el valor de $V_{g,n}(0, \dots, 0)$. La subsecció següent revela un exemple de la rellevància que poden arribar a prendre aquests resultats.

4.2 Conjectura de Witten

Hi ha almenys dos candidats per als models més simples de la gravetat quàntica en l'espai-temps de dues dimensions. Un primer candidat clàssic són els *models de matrius*, governats per *àlgebres de Virasoro*. Un altre candidat ve donat per la *gravetat topològica*, estretament lligada a la teoria d'intersecció dels espais de moduli. La motivació de Witten per formular la seva conjectura té origen en la idea que aquests dos models haurien de tenir la mateixa funció de correlació. Aquesta idea dona lloc a fórmules que expressen els nombres d'intersecció de certes classes cohomològiques dels espais de moduli en termes de la funció de partició dels models de matrius. Aquestes fórmules van ser demostrades per Kontsevich (va obtenir la medalla Fields el 1998 en part per aquest resultat).

Considerem una superfície $X \in \mathcal{M}_{g,n}$. A cada punt marcat p_i podem considerar l'espai cotangent $\mathcal{L}_i$. Quan X i els punts marcats varien, $\mathcal{L}_i$ defineix un fibrat de línia complex en l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$. De fet, aquests fibrats s'estenen de forma natural a la compactificació $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Sense entrar en detalls tècnics, resulta que $\mathcal{M}_{g,n}$ no és compacte i hi ha una compactificació estàndard, de Deligne-Mumford, amb propietats especialment bones. Aquesta compactificació s'obté adjuntant superfícies amb geodèsiques tancades simples de longitud zero o, des de la perspectiva algebraica, superfícies amb singularitats nodals. En aquest espai s'hi defineixen unes classes cohomològiques $\psi_i := c_1(\mathcal{L}_i)$ donades per la primera classe de Chern de $\mathcal{L}_i$. Les funcions de correlació venen donades pels *nombres d'intersecció* d'aquestes classes

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_g = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n},$$

on $\sum d_i = 3g - 3 + n$. En els coeficients dels polinomis $V_{g,n}$, Mirzakhani hi reconeix els *nombres d'intersecció* que apareixen en la fórmula de Witten. Aquesta identificació li permet traduir les relacions de recurrència d'aquests nombres a relacions entre els volums d'espais de moduli, i així dona una prova alternativa de la conjectura de Witten. Aquests resultats apareixen en el segon article ([9]) de la tesi doctoral de Mirzakhani.

4.3 Càlculs asimptòtics de geodèsiques

En el cas $\ell_i = 0$ els espais de moduli $\mathcal{M}_{g,n}(\ell_1, \dots, \ell_n)$ recuperen els espais clàssics $\mathcal{M}_{g,n}$ corresponents a les superfícies hiperbòliques amb cúspides. Mirzakhani integra la funció $X \mapsto N(X, \ell)$ en l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ i demostra que el nombre $N(X, \ell)$ de geodèsiques tancades i simples de longitud $\leq \ell$ en una superfície $X \in \mathcal{M}_{g,n}$ satisfà

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{N(X, \ell)}{\ell^{6g-6+2n}} = C_X,$$

on $X \mapsto C_X$ defineix una funció contínua a $\mathcal{M}_{g,n} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Observem que l'exponent de ℓ que apareix no és més que la dimensió real de l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ (equació (1)) i que C_X depèn fortament de la geometria.

Mirzakhani redueix la prova d'aquest resultat a entendre les densitats d'òrbites de geodèsiques en els *espais de laminacions mesurades* desenvolupats per Bill Thurston. Una *laminació geodèsica* és un subconjunt d'una superfície hiperbòlica format per la unió disjunta de geodèsiques simples i tancades. L'adjectiu *mesurada* indica certa mesura transversal. Com Mirzakhani explica a la seva tesi, aquest problema és similar al d'entendre les densitats de parells relativament primers en $\mathbb{Z}^2$. El seu mètode consisteix a usar l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ per obtenir la mitjana d'aquestes densitats.

A partir de l'estudi de laminacions mesurades, Mirzakhani n'extreu els resultats d'estadística topològica que hem comentat breument en la secció 2. Per revisar-los amb més precisió, ens centrarem primer en l'exemple concret de les esferes hiperbòliques amb sis cúspides. Qualsevol geodèsica simple i

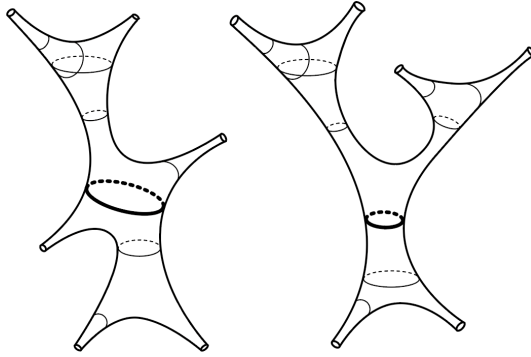


FIGURA 23: Tipus topològics de l'esfera hiperbòlica amb sis cúspides.

tancada separa aquesta superfície en dues components connexes. Obtenim o bé tres cúspides en cadascuna de les components, o bé dues cúspides en una component i quatre en l'altra. La geometria hiperbòlica prohibeix altres particions. Per tant, tenim una descomposició

$$N(X, \ell) = N_{3+3}(X, \ell) + N_{2+4}(X, \ell)$$

del nombre de corbes geodèsiques simples com la suma de corbes corresponents a cada tipus topològic. Mirzakhani demostra que la freqüència asimptòtica de cada tipus topològic està ben definida per a tota superfície hiperbòlica. En aquest exemple concret obté:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} (N_{3+3}(X, \ell) : N_{2+4}(X, \ell)) = 4 : 3.$$

Observem que aquesta freqüència únicament depèn del gènere de la superfície, i no de la seva geometria, tot i que per calcular-les utilitza l'espai de moduli $\mathcal{M}_{0,6}$.

Els resultats que Mirzakhani presenta en el tercer article ([11]) de la seva tesi són molt més generals: hi ha un nombre finit de classes d'equivalència de corbes geodèsiques simples en una superfície topològica de gènere g amb n cúspides. Mirzakhani demostra que la freqüència asimptòtica de geodèsiques simples tancades està ben definida i és la mateixa per a tota superfície $X \in \mathcal{M}_{g,n}$. Aquests nombres s'expressen, un altre cop, en termes de nombres d'intersecció dels espais de moduli. D'aquesta manera, Mirzakhani descriu propietats geomètriques de superfícies hiperbòliques individuals, en termes de la geometria i topologia de l'espai de moduli que les parametritza.

4.4 Teorema de la vareta màgica

Les superfícies que obtenim amb el desplegament de taules de billar poligonals són exemples particulars de les anomenades *superfícies de translació*, que en els casos més elementals venen donades per una unió finita de polígons en el pla amb identificacions d'arestes per translació. Aquestes superfícies apareixen també de forma natural en física d'estat sòlid, així com en problemes de teoria de grups, entre d'altres.

Hi ha un espai de moduli $\mathcal{H}$ que parametritza les superfícies de translació. Aquest espai, altament relacionat amb l'espai de moduli de les superfícies de Riemann, està dotat d'una acció del grup $SL(2, \mathbb{R})$ que generalitza l'acció en l'espai $GL(2, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{Z})$ dels tors plans. La descripció d'aquesta acció en el cas d'una superfície X obtinguda a partir d'un polígon P és senzilla: tota transformació lineal $\varphi \in GL(2, \mathbb{R})$ del pla envia P a un nou polígon $\varphi \cdot P$. Identificant les arestes corresponents obtenim una nova superfície de translació que denotem per $\varphi(X)$. El subgrup $SL(2, \mathbb{R})$ preserva les àrees dels polígons i, per tant, preserva certs estrats de l'espai de moduli, i dona lloc a una *acció ergòdica* en aquests estrats.

La teoria revolucionària de Mirzakhani, en col·laboració amb Eskin i Mohammadi, fa possible analitzar la dinàmica d'aquesta acció amb gran detall. Entendre l'òrbita d'una superfície de translació particular X en l'espai de moduli ajuda a respondre moltíssimes qüestions sobre la superfície (o taula de billar) original: el problema consisteix a considerar el conjunt de totes les superfícies de la forma $\varphi(X)$ per $\varphi \in SL(2, \mathbb{R})$ i estudiar-ne la clausura en $\mathcal{H}$. En principi, aquestes clausures podrien ser objectes extremament complicats, incloent comportaments fractals. En el cas de gènere 2, McMullen va provar que no és el cas: tota clausura d'òrbita esdevé una varietat diferencial (possiblement

amb singularitats moderades). Aquest resultat inèdit va ser considerat un enorme avenç en dinàmica no homogènia. No obstant, les tècniques de McMullen es basen en propietats molt especials dels dobles tors que no suporten els gèneres superiors. El teorema de la vareta màgica respon a una conjectura molt buscada: descriu les clausures d'òrbita en termes de varietats diferencials amb singularitats moderades (anomenades *orbifolds*), per al cas de superfícies de qualsevol gènere $g \geq 2$ [4, 5]. Les tècniques de Mirzakhani i els seus col·laboradors s'inspiren en resultats profunds de la dinàmica de fluxos unipotents en espais homogenis de Marina Ratner. Resulta increïblement sorprenent que aquests resultats es materialitzin en el món altament no homogeni dels espais de moduli.

Quan la vareta màgica toca una superfície de translació, ens retorna una varietat que ens diu tot i més del que voldríem saber sobre la superfície inicial. Utilitzada en dinàmica de billars, la vareta respon a nombrosos problemes de seguretat, d'il·luminació i de trajectòries amb obstacles [6]. El poder de la vareta actua molt més enllà dels problemes de billars. És molt possible que, en el temps que dediqueu a llegir aquest text, hagi inspirat més d'una aplicació en geometria i en dinàmica.

Nota bibliogràfica

Hi ha nombrosos articles, tant de divulgació com de recerca, que descriuen treballs de Mirzakhani amb més o menys profunditat. L'article [1] recull testimonis de la seva vida per part d'amics, col·laboradors i estudiants seus, a més de diversos articles en què s'exposen algunes de les seves contribucions a les matemàtiques. La conferència de laudació en el Congrés Internacional de Matemàtiques de 2014, impartida pel director de tesi de Mirzakhani, Curtis McMullen, revisa tres grans línies d'investigació [7]. L'article de Zorich [15] se centra en el teorema de la vareta màgica.

En l'àmbit de la recerca, les notes de Wright ([14]) ofereixen un recorregut pels resultats continguts en els més de vint articles de Mirzakhani; les notes de Wolpert ([13]) revisen la tríada d'articles derivats de la seva tesi, i el recent article de Dijkgraaf i Witten [3] se centra en la prova de la conjectura de Witten.

La millor font de totes són, sens dubte, els articles de la mateixa Maryam Mirzakhani, així com les seves conferències, que es poden trobar a la xarxa en format audiovisual, començant per [12].

Agraïments

Aquest article deriva de la conferència que l'autora va fer en el marc de l'exposició i activitats «Remember Maryam Mirzakhani», a la Universitat Politècnica de Catalunya. Agraïixo al comitè organitzador i en especial a Maria Alberich i Anna de Mier el fet d'haver-me proposat aquest repte, amb el qual he après tant.

Referències

- [1] AUTORS DIVERSOS. «Maryam Mirzakhani: 1977–2017». Coordinat per H. BARCELO i S. KENNEDY. *Notices Amer. Math. Soc.*, 65 (10) (2018), 1221–1247.

- [2] DELECROIX, V.; GOUJARD, E.; ZOGRAF, P.; ZORICH, A. «Masur-Veech volumes, frequencies of simple closed geodesics and intersection numbers of moduli spaces of curves». Preprint (2019). arXiv:1908.08611.
- [3] DIJKGRAAF, R.; WITTEN, E. «Developments in topological gravity». A: *Topology and Physics*. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2019, 17–80.
- [4] ESKIN, A.; MIRZAKHANI, M. «Invariant and stationary measures for the $SL(2, \mathbb{R})$ action on moduli space». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 127 (2018), 95–324.
- [5] ESKIN, A.; MIRZAKHANI, M.; MOHAMMADI, A. «Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $SL(2, \mathbb{R})$ action on moduli space». *Ann. of Math.* (2), 182 (2) (2015), 673–721.
- [6] LELIÈVRE, S.; MONTEIL, T.; WEISS, B. «Everything is illuminated». *Geom. Topol.*, 20 (3) (2016), 1737–1762.
- [7] McMULLEN, C. T. «The work of Maryam Mirzakhani». A: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014*. Vol. 1. Seül: Kyung Moon Sa, 2014, 73–79.
- [8] MIRZAKHANI, M. «Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces». *Invent. Math.*, 167 (1) (2007), 179–222.
- [9] MIRZAKHANI, M. «Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves». *J. Amer. Math. Soc.*, 20 (1) (2007), 1–23.
- [10] MIRZAKHANI, M. «Ergodic theory of the earthquake flow». *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2008 (3) (2008), Art. ID rnm116, 39 p.
- [11] MIRZAKHANI, M. «Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces». *Ann. of Math.* (2), 168 (1) (2008), 97–125.
- [12] MIRZAKHANI, M. «Dynamics on moduli spaces of curves». Conferència: Current Developments in Mathematics, Harvard Math, Youtube. <https://youtu.be/tpr1QMC1SYQ>.
- [13] WOLPERT, S. A. «Mirzakhani’s volume recursion and approach for the Witten-Kontsevich theorem on moduli tautological intersection numbers». A: *Moduli Spaces of Riemann Surfaces*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2013, 221–266. (IAS/Park City Math. Ser.; 20)
- [14] WRIGHT, A. «A tour through Mirzakhani’s work on moduli spaces of Riemann surfaces». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 57 (3) (2020), 359–408.
- [15] ZORICH, A. «Le théorème de la baguette magique de A. Eskin et M. Mirzakhani». *Gaz. Math.*, 142 (2014), 39–54.

Lectura metodològica i històrica de l'obra *Hibbur ha-měšihá wě-ha-tišboret* (*Tractat de geometria i mesurament*), d'Abraham Bar Hiyya (Savasorda)

JOSEP PLA I CARRERA

Resum: En ocasió del centenari del naixement de Josep Millàs Vallicrosa, va sorgir la idea de fer una anàlisi des del punt de vista matemàtic del *Tractat de geometria i mesurament* (1116), d'Abraham Bar Hiyya (Savasorda), que l'insigne arabista i hebraïsta havia traduït al català. Aquesta obra posa de manifest que, a Occident, abans del *Liber abaci* (1202), de Fibonacci, escrit en llatí, s'havia publicat, en hebreu, un opuscle en el qual s'introduïen l'equació de segon grau i els seus algorismes de resolució fonamentats en les relacions del llibre II dels *Elements* d'Euclides. A més, aquest llibret tenia una segona part dedicada a la *divisió de figures*, usant, tanmateix, mètodes geomètrics. Fibonacci, conscient de la diferència metodològica d'aquestes dues parts, va tractar la qüestió de la *divisió de figures* heretada de la matemàtica grega en un tractat separat, *La practica geometriæ* (1220).

Paraules clau: equació de segon grau a Occident, història de la matemàtica jueva medieval, Savasorda i Fibonacci.

Classificació MSC2010: 01-01, 01A35, 01A99.

En una xerrada sobre matemàtica egípcia i mesopotàmica celebrada a l'Ateneu Barcelonès, l'enginyer Josep Tarrés em va demanar si en voldria fer una a Santa Coloma de Farners sobre el *Tractat de geometria i mesurament*, de l'erudit hebreu Bar Hiyya. Em va fer molta il·lusió per un doble motiu. La que comporta que una persona erudita, un col·lectiu o una societat cultural et faci confiança. És un fet que omple d'orgull que et reconeguïn la feina de tants anys. Però també per l'indret. La Margarida i jo hem passat molts bons moments allotjats a Termes Orion sota l'aixopluc amable de la família Campeny, pujant al castell de Farners, passejant pel parc de Sant Salvador. Al Lotus Blau vam celebrar els vint-i-cinc anys conjugals amb els fills i la família i va ser una d'aquelles satisfaccions de la vida difícils d'oblidar.

Tenia el *Llibre de geometria* ([38]) des de feia anys, però no l'havia llegit, ni tan sols l'havia fullejat. En arribar a casa vaig mirar si Abraham Bar Hiyya, com l'anomena Millàs Vallicrosa,¹ és un personatge reconegut en la història general de la matemàtica. Vaig consultar el directori de Saint Andrews ([45]) i el *Biographical dictionary of mathematicians* ([33]). Totes dues fonts li dediquen un

1 La *gran enciclopèdia catalana* l'anomena Abraham Bar Hiyya (Abraham Iudaeus Savasorda). I diu: «Matemàtic, astrònom i filòsof hebreu, conegut també per *Abraham Iudaeus Savasorda*. Barcelona, 1070 - Barcelona, 1136» (<https://www.enciclopedia.cat/EC-GEC-0000284.xml>).

parell de pàgines. També l'esmenten Cajori, Smith i Loria, molt succintament,² i Taton, amb força detall.³ I, recentment, la molt digna obra de Dorce dedicada a la matemàtica desenvolupada al llarg dels segles a la península Ibèrica en fa una síntesi ([24, volum II, p. 51–56]). També vaig consultar el recull bibliogràfic de Dauben, que remet a set textos, entre llibres i articles ([23, ítems 436, 442, 446–448, 482, 502 i 1826, p. 95, 96, 97, 105, 109 i 332]). Totes aquestes obres són a l'abast dels que s'interessen per la història de la matemàtica. Cap d'elles no és un text especialitzat.⁴

Aquestes referències em van animar a endinsar-me en el *Llibre de geometria* i, com acostuma a passar quan es llegeix amb atenció i cura una obra matemàtica, em vaig adonar que és molt més teòrica del que ella mateixa s'atribueix. Tot això, em va motivar a fer-ne una presentació de caire històric i metodològic pensada per a un públic matemàtic però ampli, una motivació que em va portar a escriure aquestes pàgines.

1 Unes gotes de la biografia i de les obres

Abans d'endinsar-nos en els continguts, en els paral·lelismes amb obres precedents, en les fonts en què s'inspira i en les influències que el *Llibre de geometria* va tenir, ens ha semblat que valia la pena fer una ressenya breu de l'home i la seva obra.

1.1 Biografia breu

Abraham Bar Ḥiyya (o Abraham Iudæus Savasorda) (Barcelona, ~1065⁵ - Provença, 1136),⁶ conegut com a Savasorda, del nom àrab Sāhib aix-Xurta ('cap de la guàrdia'),⁷ matemàtic, astròleg, astrònom i filòsof hebreu català. Es va formar a la cort dels Banu Hud de Saragossa.⁸ A més, va ocupar càrrecs d'importància a les corts islàmiques d'Aragó, un dels quals li va valer el sobrenom pel qual se'l coneix: Savasorda. La seva obra matemàtica, astronòmica i filosòfica va contribuir a la difusió de la ciència àrab en el món occidental. Destaca la del 1116 ([5]), escrita en hebreu.

A més de les seves obres, cal distingir les traduccions en què va participar, col·laborant amb Plató de Tívoli (Plato Tiburtinus) ([55, p. 99]), al qual va servir com a traductor intermediari oral de l'àrab al romanç. D'aquesta col·laboració, que es va mantenir durant la seva estada a Barcelona (1134–1145), va sorgir una

2 [17, edició de 1985, p. 121], [60, volum I de l'edició de 1958, p. 206 i 123] i [34, p. 140, nota 2]).

3 [62, edició castellana de 1988, volum III, p. 612, 614, 616, 636–637, 640–641 i 678]. Curiosament, les històries de la matemàtica de factura més actual l'ometen. N'és una excepció [30, p. 123–124].

4 Els textos especialitzats els podem trobar a l'edició catalana de [5] i també a les bibliografies de [45] i [33].

5 Hi ha biografies que afirmen que és natural de Saragossa. D'altres, en canvi, l'anomenen directament Abraham bar Ḥiyya ha-Bargeloni. També hi ha qui afirma que era natural d'Egipte.

6 Per a les notes biogràfiques podeu consultar, a més dels ja esmentats [33] i [45], els textos [57, §31, p. 43] (breu), [24] (més llarg) i [42, volum I, capítol 9, p. 219–262] (força extens).

7 Tomeo fa referència a l'existència d'un document de l'arxiu de la catedral d'Osca, datat l'any 1137, en què s'esmenta «una heredad que fue de Xabaxorda judeo» ([63, p. 27]).

8 A §10 apleguem els personatges esmentats a l'article.

dotzena de traduccions llatines en el camp de les matemàtiques, l'astronomia i l'astrologia ([18, p. 147-149]).

1.2 Obres i traduccions

Ens sembla important fer un recull de les seves obres i de les traduccions que va fer amb Plató de Tívoli perquè posen de manifest dos fets importants: tenia un coneixement ampli de l'obra científica dels àrabs i dels grecs a través dels àrabs, i la va rellegir amb aportacions personals.

1.2.1 Les obres En aquest paràgraf ens basem en la informació que proporciona la introducció de Millàs a l'obra de Bar Ḥiyya del 1117.⁹

- I *Yēsodé ha-ēbuná wē-migdal ha-ēmuná*¹⁰ (*Fonaments de la intel·ligència i torre de la creença*) [7]. És una mena d'enciclopèdia científica; en el prefaci, Bar Ḥiyya diu que és una traducció de l'àrab a l'hebreu, però no s'ha trobat cap original àrab amb el mateix contingut.¹¹
- II *Ḥibbur ha-mēšihá wē-ha-tišboret* (*Tractat de geometria i mesurament*) [5]. És l'obra que ens ocupa i en parlarem més avall.¹²
- III *Šurat ha-areš wē-tabnit ha-šmavin* (*Forma de la Terra i les figures del cel*) [9].¹³ És un tractat d'astronomia i cosmografia, dedicat a Abraham ben Selomo, un personatge desconegut i que deriva bàsicament del *Kitab fi harakat as-sama-wiyya wa-yawa mi ilm an-nuyyum* d'al-Farghaní.¹⁴
- IV *Ḥēsbón mahlekot ha-kokabim* (*Càlcul dels moviments dels astres*) [8]. És la presentació matemàtica de determinades qüestions d'astronomia. Fou acabada a Barcelona el 10 d'abril de l'any 1136. Està inspirada en l'obra d'al-Battaní. Alguns manuscrits contenen notes d'Abraham ibn Ezra. S'hi descriu l'eclipsi de Lluna (figura 1).¹⁵



FIGURA 1: L'eclipsi de Lluna a l'astronomia de Bar Ḥiyya.

9 [39, p. v-vii]. També [55]. A [57, p. 43] s'esmenta un parell d'obres més. Hi ha manuscrits de Savasorda a les biblioteques de Berlín, Dublín, Munic, Oxford, París, Parma i el Vaticà. Vegeu la bibliografia.

10 La tipografia del títol hebraic de les obres és el de [42, volum I, p. 222].

11 [55, p. 97] afirma que, potser, es tracta d'una sèrie de traduccions de diferents originals reunides en forma d'enciclopèdia; és la primera coneguda en hebreu. I curiosament tracta de les quatre ciències del quadriví: aritmètica, geometria, astronomia i música. En català, [39].

12 En totes les citacions d'aquesta obra, la paginació correspon a l'edició catalana [38].

13 L'any 1546 Sebastian Munster el va traduir al llatí, [44].

14 [55, p. 101]. Hi ha comentaries que la consideren una de les obres més notables de Savasorda. Uns altres ho fan amb la de geometria; d'altres, amb la de filosofia, i encara n'hi ha que ho fan amb el llibre revelador.

15 La figura, de domini públic, l'hem manllevada de <https://es.wikipedia.org/wiki/Abraham-Bar-Ḥiyya>.

- v *Luḥot (Taules astronòmiques)* [12]. Constitueix un complement de l'obra anterior. Les taules es coneixen com a *taules de Savasorda*. Se'n conserven diferents versions: unes de calculades per al meridià d'Al-Raqq, i unes altres per al de Tolosa de Llenguadoc, que són les que va seguir segles després Bonet Bonjorn.¹⁶
- vi *Sēfer ha-'ibbur (Llibre de la intercalació del calendari)* [13]. Serveix per determinar les dates del calendari jueu, un problema important per a la litúrgia.
- vii *Sefet Hegyón ha-néfeš (Meditació de l'ànima)* [10]. És un tractat de filosofia.
- viii *Mēguil-lat ha-mēgal-lé (Llibre revelador)* [6]. És una exegesi messiànica.¹⁷
- ix *Iggřet ha-astrologiya (Epístola sobre l'astrologia)* [11].

1.2.2 Les traduccions Tenim coneixement d'unes quantes traduccions llatines que va fer amb Plató de Tívoli, com ja hem indicat abans ([55, p. 104]). D'algunes se'n coneix la data, però d'altres, no.

- i *De horarum electionibus* (1133), d'Ali ben Àhmad al-Imrani.
- ii *De iudiciis natiuitatum* (1136), d'Abu Ali al-Jayyat.
- iii *Iudicia seu propositiones* (1136), d'un al-Mansur desconegut.
- iv *Quadripartitum* (1138), de Ptolemeu.
- v *Centiloquium* (1138), d'Àhmad ibn Yússuf al-Misrí.
- vi *Liber embadorum* (1145), de Bar Ḥiyya.
- vii *De motu stellarum*, d'al-Battaní.¹⁸
- viii *Esfèriques*, de Teodosi de Bitínia.
- ix *De revolutionibus natiuitatum*, d'Abu Bakr ibn al-Jasib, conegut com a Albubather.
- x *De operibus astrolabiæ*, d'Ibn as-Saffar.
- xi *Aeneas de pulsibus et urinis*, probablement d'Hunayn ibn Ishaq.
- xii *Alfakini arabici filii questiones geomanticae*, d'autor desconegut.

Com ja hem indicat, aquesta síntesi posa de manifest que Bar Ḥiyya i Plató de Tívoli coneixien tant obres gregues com àrabs. És possible que les obres gregues les coneguessin a través dels estudis i traduccions fets pels erudits àrabs que els havien precedit, però això és una simple especulació.

2 El Tractat de geometria i mesurament

Nosaltres, com ja hem indicat, centrarem l'atenció en l'obra geomètrica *Ḥibbur ha-mēšihā wē-ha-tišboret (Tractat de geometria i mesurament)*, traduïda al llatí per Plató de Tívoli com a *Liber embadorum* (1145). I ho farem seguint els set ítems següents:

16 [55, p. 102] [Bibliothèque Nationale, París, MS. No10.901, Adolf Neubauer, «cat. Bodl. Hebr. MSS.» No 2.072,2].

17 Per a l'edició catalana de Millàs, [37]. Una anàlisi es troba a [64].

18 Aquesta obra la va comentar i s'hi va inspirar posteriorment Regiomontanus.

2.1	Una breu reflexió sobre la introducció.....	115
2.2	Les qüestions teòriques del <i>Llibre de geometria</i>	119
2.3	Les taules de dependències i d'influències	126
2.4	La dualitat de l'obra geomètrica	132
2.5	Els lligams entre l'àrea del cercle i la longitud de la circumferència .	135
2.6	La taula de cordes i arcs	140
2.7	Un problema paradigmàtic	143

Abans, però, volem insistir, d'una banda, en el caràcter teòric de l'obra. De fet, com queda ben palès en una lectura aplicada del text, molts dels problemes «pràctics» que planteja Bar Ḥiyya són absolutament «teòrics», és a dir, són plantejaments que no es fan necessàriament per la seva utilitat real sinó com un aprofundiment de les possibilitats dels mètodes novells i del potencial amb què permeten resoldre de forma acurada qüestions que, fins aleshores, s'havien plantejat en el si de la geometria.

I, de l'altra, en la dualitat de l'obra. En el capítol segon, Bar Ḥiyya, com ja havien fet els matemàtics mesopotàmics, resol certs problemes geomètrics —aquells que depenen d'allò que estableix el llibre II dels *Elements* d'Euclides—, però ho fa amb una eina nova —l'*àlgebra*. Els problemes que planteja són concrets, és a dir, s'enuncien amb dades numèriques, a l'estil de la matemàtica oriental, però es resolen aplicant les relacions geomètriques prèviament establertes, que són genèriques.

I, en canvi, el capítol tercer, dedicat a les *divisions de les figures geomètriques*, és totalment geomètric. No hi ha cap intent de reduir la resolució a l'àlgebra. En molts casos es recorre a la descomposició tangram de les figures. I, malgrat que, en algunes de les primeres divisions, hi ha dades numèriques, la resolució no es basa, com abans, en les relacions geometricoalgebraiques establertes prèviament.¹⁹ Tampoc no podem dir que sigui un capítol de caire aplicat, malgrat que alguns dels resultats puguin ser útils a la pràctica.

Reblarem aquesta afirmació —el caràcter teòric del llibre— amb dos exemples concrets, un de cada capítol, a §2.4 i, d'una manera irrefutable, a §2.7.

2.1 Una breu reflexió sobre la introducció

2.1.1 Ressons de la introducció A la introducció de l'obra llegim:

[...] D'aquests passatges hom desprèn que Déu creà el món amb nombre, mesura i pes; així és que l'home ha de procurar amb totes les seves forces assemblar-se al seu Creador, i en això consisteix la glòria del savi.

[...] Que Déu poderós i temible, *sabedor de tot secret*, amb el qual roman la llum, m'ajudi a fi que pugui explicar, segons la Llei i rectitud, el nostre assumpte, car Ell ensenya la ciència a l'home.²⁰

19 Estem molt lluny encara d'una geometria cartesiana en la qual els problemes geomètrics es redueixen a l'àlgebra i eviten els recursos geomètrics. Caldrà esperar alguns segles encara, però aquesta geometria es consolidarà gràcies a Viète i, sobretot, a Descartes i Fermat.

20 [5, p. 5 i 8]. L'èmfasi és nostre. Vegeu la nota 12, que ja no tornarem a esmentar.

Aquestes paraules recorden les del frontispici del papir Rhind (~1800 aC), i alhora hi contrasten:

Estudi complet i profund de tot el que existeix, penetració de tots els misteris [...] *de tots els secrets*.²¹

Ambdós textos tenen com a objectiu desentrellar «tots els secrets», en el més antic d'una manera deslligada dels déus, en el més recent gràcies a Ell.²²

No és menor aquest parallelisme si tenim present que un dels objectius és la mesura de la Terra. Savasorda diu:

He vist que la major part dels savis contemporanis de la Terra de França no són instruïts en el mesurament de les terres ni experts en llur partició, per tal com es confonen sovint i divideixen els terrenys entre els hereus consocis amb inexactitud, amb la qual cosa pequen, segons la pertorbació que causen.²³

Ressonen també aquestes paraules amb l'experiència egípcia. És ben conegut que, segons Heròdot ([48, A.1.2a, p. 271]), la paraula *geometria* sorgeix a Egipte dels *mesuradors de cordes*, funcionaris del faraó que tenien la comesa d'amidar les terres després de les inundacions per tal que els impostos que havien de pagar aquells que les conreaven fossin justos (figura 2).²⁴



FIGURA 2: Pintura sobre estuc de la tomba tebana de Djeserkare-soneb, del regnat de Tuthmosis IV (1401 aC - 1391 aC).²⁵

I, en ambdós textos, s'indica la manera de calcular les àrees del triangle, del quadrilàter —rectangle i trapezi— i del cercle. Són aquests algorismes de

21 [48, p. 12] i [19, p. 122]. L'èmfasi és nostre.

22 Bar Hiyya desconeixia el text egipci, però el parallelisme palesa la unitat del pensament matemàtic a través dels segles i per això ens ha semblat que valia la pena posar-lo en relleu. Recordem que, a *Lleis*, Plató, referint-se a l'aprenentatge dels joves egipcis, diu: «Aquests entreniments els preparen per saber distribuir bé un camp, conduir i posar un exèrcit en ordre i administrar adequadament els seus propis assumptes casolans.» ([52, p. 540]).

23 [5, p. 5].

24 [48, p. 38 i 92]. En contra de l'afirmació de Gillings segons la qual a l'Egipte antic no hi trobem cap testimoni fefaent de l'existència dels «mesuradors de cordes» ([28, p. 228]), Ralph Abraham afirma que en podem veure una il·lustració a [65, p. 20].

25 Representa els «mesuradors de cordes». Vegeu en línia <http://www.ralph-abraham.org/courses/math181/math181.S96/lectures/lecture.3m/rope.html>.

càlcul els que justifiquen el caràcter aplicat de l'obra, si bé en Bar Ḥiyya l'anàlisi d'aquestes expressions és molt més extensa.

A més, el papir Rhind, a diferència del text de Bar Ḥiyya, planteja i resol, entre altres qüestions que no esmentem, l'equació de primer grau (§2.1.2), una qüestió que no trobem al *Llibre de geometria*. També proporciona, de forma raonada, un valor aproximat de π , però ho fa de manera implícita (§2.1.3). En canvi, el text de l'autor hebreu en dona un altre, diferent de l'egipci, però ho fa de manera explícita (§2.5.2).

2.1.2 L'àlgebra del papir Rhind El papir Rhind, aquest document matemàtic extraordinari,²⁶ exposa ben clarament què cal fer per resoldre una equació de primer grau, és a dir, una equació del tipus

$$ax = b, \quad ax + b = c, \quad x + ax = b \quad \text{o} \quad x + ax + bx = c.^{27}$$

I, com és habitual en la matemàtica oriental, ho fa amb exemples concrets, si bé els *mètodes* que utilitza són *generals* i de dues maneres diferenciades:

2.1.2.1 El mètode actual ([48, p. 84-85]) Per tal de resoldre $ax = b$ o $ax + b = c$, l'única cosa que cal saber fer és *dividir* b o $c - b$ per a , respectivament.²⁸ En el primer cas, x és igual a $\frac{b}{a}$ i, en el segon, a $\frac{c-b}{a}$.

2.1.2.2 El mètode de falsa posició ([48, p. 83-84]) Veiem, en concret, el problema 24 del papir Rhind. A la taula 1, fem una lectura del text del papir i l'acompanyem d'una formulació més actual ([48, p. 83]).

Papir Rhind	Formulació actual
Una quantitat i una setena part és 19.	$x + \frac{1}{7}x = 19.$
Suposem que la quantitat és 7. ²⁹	$7 + \frac{1}{7}7 = 8.$
Multipliquem 7 per 19 dividit per 8.	$7 \times \frac{19}{8} = \frac{133}{8}.$
19 dividit per 8 dona $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. ³⁰	$\frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8}$ ³¹ $= 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$
Multipliquem 7 per $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. ³²	$7(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 14 + \frac{7}{4} + \frac{7}{8}$ $= 14 + \frac{21}{8} = 16 + \frac{5}{8}$ $= 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$
Dona $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$	

Taula 1: El problema 24 del papir Rhind.

26 Es conserva al Museu Britànic i al Museu de Brooklyn.

27 [48, §1.9.1, p. 82-83].

28 Podem afirmar que la *divisió* és el leimotiv del papir Rhind i es fa usant fraccions de numerador 1. És tècnicament més complexa del que podria semblar. Vegeu [48, §1.8.3, p. 50-54 i §1.8.3, p. 54-58].

29 Fixem-nos que amb aquest valor s'obté una suma entera. És a dir, s'aconsegueix eliminar els denominadors.

30 Com ja hem dit a la nota 28, la matemàtica egípcia solament accepta les fraccions unitàries, és a dir, de numerador 1 i sense repeticions. Però, en aquest cas, tot és fàcil, ja que $19 = 16 + 2 + 1$.

31 Nosaltres acabaríem els càlculs abans de la darrera igualtat.

32 És delicat perquè, com dèiem, en la matemàtica egípcia, no podem usar ni $\frac{7}{4}$ ni $\frac{7}{8}$ ni $\frac{21}{8}$ ni $\frac{5}{8}$. En aquest cas, és fàcil entendre el resultat egipci. Observem que $\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ i $\frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Si els ajuntem tenim $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

2.1.2.3 Explicació formalitzada del mètode de falsa posició El mètode que segueix l'escriba —i que retroben en altres papirs— es coneix amb el nom de *mètode de falsa posició*. I, per resoldre l'equació $ax = b$, funciona així:

Pas 1. Donem a x un valor concret, per exemple, el valor x_0 .

Pas 2. Aleshores, $ax_0 = b_0$.

2.1. Si $b_0 = b$, el problema queda resolt.

2.2. Si $b_0 \neq b$, x_0 no és la solució correcta i cal corregir x_0 a fi d'obtenir la correcta.

2.2.1. Multipliquem ambdós membres per $\frac{b}{b_0}$.

2.2.2. Obtenim: $b = \frac{b}{b_0} \times b_0 = \frac{b}{b_0} \times (ax_0) = a\left(\frac{b}{b_0} \times x_0\right) = a\left(\frac{b \times x_0}{b_0}\right)$.

2.2.3. Per tant, $x = \frac{b}{b_0} \times x_0$ és la solució buscada.³³

Com ja hem dit abans, la resolució de les equacions de primer grau no es troba a l'obra de Bar Ḥiyya que estem analitzant, però, en canvi, la trobem a l'àlgebra d'al-Hwārizmī i també a la de Fibonacci, en què trobem els dos mètodes que hem descrit suara.

2.1.3 L'àrea del cercle en el paper Rhind Els problemes 41 al 43 del paper Rhind demanen el volum d'un cilindre de diàmetre de la base $d := 9$ unitats i altura $h := 10$ unitats ([48, p. 99-100] o [19, p. 156-159]).

Els càlculs del paper responen a la fórmula

$$\mathcal{V}(= \mathcal{A}_{\text{base}} \times h) = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \times d^2 \times h.$$

És a dir, l'àrea de la base —que és un cercle de diàmetre 9 unitats— val $\left(\frac{8}{9}\right)^2 \times d^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \times r^2$. Per tant, $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1605$ és una aproximació del nombre que actualment anomenem π , que millora sensiblement el 3, que és el valor que normalment s'usava com a aproximació de π .³⁴

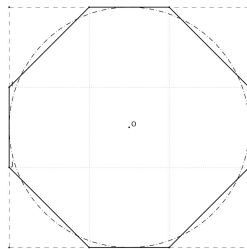
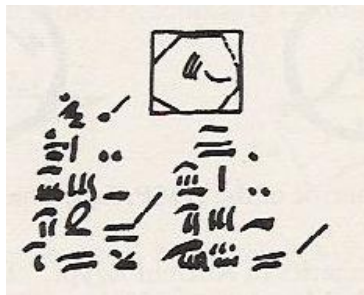


FIGURA 3: El problema 48 del paper Rhind i la interpretació moderna. A la figura de la dreta, l'octàgon ocupa $7/9$ de l'àrea total, que és equivalent a $63/81$. Com que 63 no és un quadrat perfecte, l'escriba pren l'aproximació $64/81$, fet que explica el terme $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ que apareix a la fórmula de l'àrea.

³³ Com veiem, només cal fer tres càlculs: multiplicar a per x_0 , dividir b per b_0 i multiplicar el resultat per x_0 . En concret, com hem vist en el problema 24 del paper Rhind, $a = 8/7$, $b = 19$, $x_0 = 7$ i $b_0 = 8$.

³⁴ La determinació del volum d'una pica cilíndrica la trobem als textos jueus 1R 723-24 i 2P 42: «Després féu la gran pica, de bronze fos. Rodona tot al voltant, mesurava deu colzes de profunditat. Feia trenta colzes de perímetre» ([43, p. 1273 i 1547]). Bar Ḥiyya esmenta diversos textos bíblics en aquesta mateixa línia i els analitza a [7, §192 i 193, p. 132-133].

El problema 48 suggereix el camí seguit per l'escriba per determinar l'aproximació anterior. És, de fet, la primera vegada a la història escrita de la matemàtica —que ha perviscut— que es *quadra el cercle* (figura 3).

2.1.3.1 El càlcul de l'àrea del cercle de diàmetre 9 del papir Rhind Els passos que fa l'escriba són:

1. El cercle de diàmetre 9 colzes l'inscrivim en el quadrat de costat igual al diàmetre.
2. Aquest quadrat el dividim en 9 quadrats de 3 colzes de costat cada un.
3. D'aquest quadrat traiem les quatre puntes formades per triangles rectangles isòsceles de 3 colzes de costat.
4. Queda un octògon de superfície igual a: $S_{\text{octògon}} = 9 \times 9 - 4 \times (\frac{1}{2} \times 3 \times 3) = 81 - 18 = 63 \text{ colzes}^2$.
5. Aquesta quantitat no és un quadrat perfecte i l'escriba agafa, com a superfície del cercle de diàmetre 9 colzes, $S_{\text{cercle}} = 64 \text{ colzes}^2$.
6. El cercle de diàmetre 9 colzes equival al quadrat de 8 colzes.³⁵

2.2 Les qüestions teòriques del *Llibre de geometria*

Malgrat que, segons diu Savasorda a la introducció, es tracta d'un text aplicat, aquesta pràctica es basa en qüestions teòriques que cal conèixer bé:

He vist que la ciència del nombre i la ciència de la mesura segueixen el camí de referència i eren útils en moltes arts i que eren d'ús en la pràctica de la Llei.³⁶

[...] No podràs fer aquests càlculs, i mesurar un camp i la quantitat dels seus fruits o el lloguer que correspon als anys restants i veure la proporció que guarden els nombres, si no ets pèrit en la ciència del càlcul.³⁷

I, efectivament, el text comença introduint els conceptes que cal tenir ben assolits:

Tot autor, en un principi, ha d'explicar les paraules que empra a fi que l'estudiós les entengui amb el mateix sentit que el primer.³⁸

2.2.1 Les definicions I tot seguit dona un grapat de definicions de termes: angle,³⁹ segments perpendiculars i paral·lels, diagonal, cercle i circumferència, figures poligonals de tres i quatre costats —que classifica—, i raó de nombres, entre d'altres.⁴⁰

35 Fixem-nos que, efectivament, fem l'àrea del cercle equivalent a la d'un quadrat. Hem *quadra el cercle*.

36 [5, p. 3-4].

37 [5, p. 4].

38 [5, §1, p. 4].

39 Malgrat que només usa l'angle recte i, com veurem a §2.6, quan vol dividir la circumferència usa les cordes i els arcs en lloc dels angles centrals.

40 Totes aquestes definicions s'inspiren en els *Elements* d'Euclides. La referència [38] hi remet, indicant quin és l'element utilitzat en cada cas.

2.2.2 Les relacions algebraiques Tot seguit, l'autor proporciona relacions algebraiques que estableix en concret però que són vàlides en general i que representa amb figures geomètriques (§27 a §32).⁴¹

Les *mostracions* de la validesa d'aquestes expressions algebraiques es fan, com en el llibre II dels *Elements* d'Euclides, geomètricament, pel mètode tan-gram.⁴²

Les identitats que obté li permeten resoldre les tres menes d'equacions de segon grau:

$$x^2 = ax + b, \quad x^2 + ax = b \quad \text{i} \quad x^2 + b = ax$$

i molts altres problemes geomètrics que porten a aquesta mena d'equacions.⁴³

Paràgrafs del <i>Llibre de geometria</i>	Formulació algebraica	Proposició dels <i>Elements</i> ⁴⁴
§27	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	EII 4 ⁴⁵
§28	$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	EII 5
§29	$(a + b)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$	EII 6
§30	$(a + b)^2 + a^2 = 2a(a + b) + b^2$	EII 7
§31	$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2$	EII 9
§32	$(a + x)^2 + x^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2} + x\right)^2$	EII 10

Taula 2: Relacions algebraiques del *Llibre de geometria*.

Només en reproduïrem una que retrobarem més endavant.

§28. En tota recta dividida en dues parts iguals i dues de desiguals, la suma del producte de les dues parts desiguals més el quadrat de la meitat de la diferència [de les parts] és igual al quadrat de la part igual.

Així una recta que tingui 12 colzes si la dividim en dues parts iguals de 6 colzes i en altres dues de 8 i 4 colzes, tindrem que el producte de 8 per 4 sumat amb el quadrat de la meitat de la diferència entre 8 i 4, o sigui 4, és 36, que és igual al quadrat de la part igual a 6.⁴⁶

41 Es troben recollides algebraicament al pròleg del *Llibre de geometria* [38, p. VII-VIII] i que recollim a la taula 2 i, com dèiem, són rèpliques dels primers teoremes del llibre II dels *Elements* d'Euclides.

42 És a dir, constatant que dues superfícies rectangulars són equivalents perquè es componen de peces diferents però equivalents. Vegeu [48, p. 212-214] i [50, p. 9].

43 En concret, resol les equacions concretes $x^2 - 4x = 21$, $x^2 + 4x = 77$ i $x^2 - 4x = 3$ ([5, §47, §48 i §49, p. 36-39]).

44 [50, taula 1.4, p. 33].

45 Usem el símbol EM n , on $M \in \{I, II, \dots, XII, XIII\}$ i $n \in \mathbb{N}$ per referir-nos a la proposició n del llibre M dels *Elements* d'Euclides.

46 Com es pot veure a la figura geomètrica de Savasorda (figura 4), aquesta igualtat és vàlida. Suposem que una longitud ℓ satisfà: $\ell = a + b = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2}$, amb $b < a$. Aleshores (segons l'ítem segon de la taula 2) $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$. La igualtat és immediata si tenim en compte l'ítem primer, $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2(a \times b)$.

2.2.2.1 Anàlisi geomètrica Heus ací la demostració (figura 4):⁴⁷

Segui la recta AB (de 12 colzes). Dividim-la en el punt T en dues parts iguals (de 6 colzes) i després dividim-la en E en dues parts desiguals AE i EB (de manera que el segment AE faci 8 colzes i EB en faci 4). Des del punt E tracem una recta igual a EB , o sigui la recta EU , i quadrarem⁴⁸ el segment major pel menor i obtindrem el rectangle $\square AEUZ$; després quadrarem la diferència entre el segment major i la diferència entre el segment major i la meitat, o sigui el segment TE ,⁴⁹ i obtindrem el quadrat $\square HUID$, i aquests dos quadrats sumats són iguals al quadrat $\square ATDC$, que és igual al 6 per 6, puix que si restem a la suma anterior el quadrat $\square ATHZ$ en resultarà el quadrilàter $\square TEID$, el qual és igual al $\square ZHDC$, segons es desprèn de les figures.⁵⁰

El rectangle $\square AEUZ$ equival al gnòmon $\square ATH(Q)(S)CA$, atès que el rectangle $\square TEUH$ és igual al $\square Z(Q)(S)C$. Aleshores, el quadrat de costat AT satisfà la igualtat

$$\begin{aligned}\square ATDC &= \square ATH(Q)(S)CA + \square (Q)HD(S) \\ &= \square AEUZ + \square HUID.\end{aligned}\tag{1}$$

Fixem-nos que, per conèixer AE i EB , en tenim prou de conèixer UH ja que

$$AE = AT + UH \quad \text{i} \quad EB = BT - UH.$$

2.2.2.2 Síntesi algebraica Si coneixem, doncs, el segment AB i l'àrea del rectangle $\square AEUZ$ que les parts desiguals determinen, el problema està resolt atès que la igualtat anterior ens permet conèixer $\square HUID$ i, de retruc, el seu costat UH .

Per veure formalment la igualtat (1), fem $AT = TB = \frac{\ell}{2}$, $AE \times EB = b$, $BE = y$ i $AE = x$. Resulta que $UH = \frac{x-y}{2}$ i, per tant,

$$\square ATDC = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = x \times y + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = b + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

⁴⁷ Aquí no cal conèixer els valors dels segments perquè la demostració —de fet, és una simple demostració— és geomètrica per tangram.

⁴⁸ Bar Hiyya usa el terme *quadrar* per indicar la determinació d'una àrea rectangular que pot ser quadrada, i el terme *quadrat* per designar quadrats i rectangles. Això fa que el text sigui un pèl confús.

⁴⁹ El punt T divideix el segment AB per la meitat.

⁵⁰ [5, §28, p. 18-19]. Hem afegit el segment $(R)(S)$ per fer més entenedora la figura de Bar Hiyya. Ho hem fet de manera que $(R)A$ és igual a la part BE . És clar, doncs, que $ET = T(R)$ és igual a la meitat de $E(R)$.

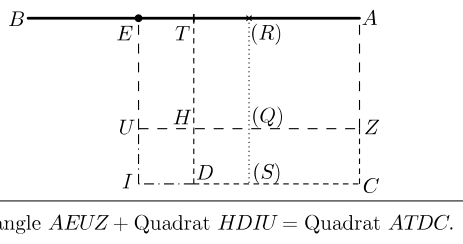


FIGURA 4: Figura tangram de Savasorda.

De retruc,

$$\square UHID = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - b$$

i

$$UH = \frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - b}.$$

Per tant,

$$x = \frac{\ell}{2} + \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - b}, \quad y = \frac{\ell}{2} - \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - b}. \quad (2)$$

Hem obtingut l'expressió algebraica dels valors x i y que resolten el problema algebraicgeomètric $x + y = \ell$ i $x \times y = b$.

2.2.3 Dues aplicacions concretes del cas exposat Vegem ara dues aplicacions concretes que, si bé per l'enunciat podrien semblar diferents, són la mateixa.

§49 E) Qüestió tercera. Quin és el quadrat que restant la seva àrea a la longitud dels seus quatre costats dona tres?

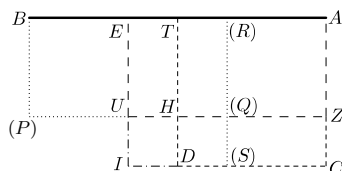
Es tracta de resoldre $4y - y^2 = 3$, que podem plantejar, en general, $\ell y - y^2 = b$.

Resolució Fixem-nos que la quantitat $\ell y - y^2$ —que depèn de la dada ℓ , que és la longitud de AB i de la quantitat desconeguda y , que és la de $BE = EU$ (figura 5)— és l'àrea del rectangle $\square AEUZ$,⁵¹ que equival a l'àrea del gnòmon $\square ATH(Q)(S)C = \square ATDC - \square HD(S)(Q)$,⁵² que és donada i val b .

Per tant, aplicant la regla pràctica, resulta que el quadrat $\square HUID$ és conegut i, de retruc, també ho és UH , perquè coneixem l'àrea de $ATDC$ i la del gnòmon.⁵³

I d'ací tenim el valor de y , com hem vist a (2).

Això és el que fa Bar Hiyya en el cas concret, $4y - y^2 = 3$, en què $\ell = 4$ i $b = 3$. La meitat de 4 és 2, al quadrat és 4, menys 3 és 1, que és l'àrea del



Rectangle $AB(P)Z$ —Quadrat $B(P)UE = \text{Rectangle } EUZA$.

FIGURA 5: La figura de $\ell y - y^2 = b$.

⁵¹ Òbviament, $\ell y - y^2 = AB \times B(P) - BE^2$, que és el rectangle $\square AEUZ$.

⁵² $b := \square AEUZ$ equival al $\square ATH(Q)(S)C$, que, al seu torn, equival a $\square ATDC - \square HD(S)(Q)$. $\square ATDC := (\frac{\ell}{2})^2$ és conegut. De retruc, $\square HD(S)(Q)$ també.

⁵³ $b = (\frac{\ell}{2})^2 - UH^2$. O sigui, $UH^2 = (\frac{\ell}{2})^2 - b$.

quadrat buscat. Per tant, el costat és 1. I aleshores, $x = 2 + 1 = 3$ i $y = 2 - 1 = 1$ ([5, §28, p. 38-39]).

§52 C) En un rectangle l'àrea del qual és de 48 colzes i la suma de les seves mides és 14, quant fan aquestes?

Aquest és, precisament, el problema que resol la regla pràctica amb $\ell = 14$ i $b = 48$.⁵⁴

Fem el quadrat de 7 —la meitat de 14—, que és 49. Li sostraiem 48. Dona 1, l'arrel quadrada del qual és 1. Les mides són, doncs, $8 = 7 + 1$ i $6 = 7 - 1$ ([5, §28, p. 42-43]).

2.2.4 Antecedents d'aquesta mena de problemes Aquesta classe de problemes, que menen a la resolució d'una equació de segon grau, ja l'havien resolt els matemàtics mesopotàmics⁵⁵ i ho havien fet d'una manera anàloga a la que emprà Bar Hiyya. És a dir, usant tangram. Inicialment s'havien plantejat el problema geomètric:

*Dividir un segment donat en dues parts de manera que l'àrea del rectangle que determinen és donada.*⁵⁶

Com acabem de veure, és el problema de Bar Hiyya §52 C).⁵⁷

Aquest problema el trobem implícitament al llibre II dels *Elements* d'Euclides,⁵⁸ però en la mentalitat de la geometria grega:

*Donat un segment AB i l'àrea d'un quadrat de costat MN, és possible determinar el punt E que divideix el segment AB de manera que el rectangle que les dues parts formen tingui una àrea equivalent a la del quadrat donat.*⁵⁹



FIGURA 6: La tauleta BM 13.901.

En el context grec, l'expressió *és possible determinar* implica que la construcció es pot fer *amb regla i compàs* ([50, p. 9-10]).

La solució, força simple, és la que mostra la figura 7.

⁵⁴ $x + y = 14$ és AB o sigui ℓ i $x \times y = 48$ és el rectangle $AE \times EB$ que és el rectangle $\square AEUZ$.
⁵⁵ Per exemple, a la tauleta BM 13.901 (figura 6), conservada al Museu Britànic, hi ha 24 problemes que porten a la resolució d'equacions de segon grau. Per a una descripció en termes algebraics, [48, p. 193].

⁵⁶ [48, §2.7.6, p. 204-206 i §2.7.8, p. 212-214].

⁵⁷ De fet, el problema que demana trobar les parts x i y que satisfan $x + y = \ell$ i $x \times y = b$ porta a resoldre l'equació de segon grau $\ell x - x^2 = b$. I, recíprocament, les solucions x i y de l'equació $\ell x - x^2 = b$ satisfan, segons les identitats de Cardano-Viète, $x + y = \ell$ i $x \times y = b$.

⁵⁸ Nota 44 (p. 120).

⁵⁹ [50, EII 5, p. 34 i p. 162-164, i la nota 556, p. 164. I també EVI 27, p. 56-57 i 340-341, i la nota 939, p. 341].

Dimidíem el segment AB . Es pot fer amb regla i compàs [Ei 10]. Obtenim el punt T .

Sobre AT fem un quadrat. Es pot fer amb regla i compàs [Ei 46]. Obtenim el quadradet $\square TDCA$.

Sobre el segment TD , a partir de T portem un segment igual a MN . Es pot fer amb regla i compàs [Ei 2]. Obtenim un punt P .

Amb centre P i radi igual a AT tirem una circumferència [P 3] que talla el segment AB pel punt E .

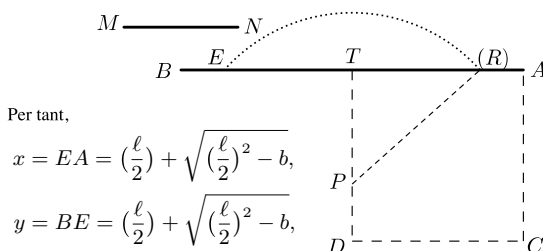
Aquest és el punt buscat.⁶⁰

La construcció mostra ben clar que el segment MN ha de ser més curt que el segment AT , o bé que el quadrat $\square TDCA$ ha de ser més gran que el quadrat de costat MN . És a dir, les magnituds han de satisfer un *diorisma*.⁶¹

$$TA = TB = \frac{\ell}{2} \text{ i } MN \text{ és tal que } MN^2 = b.$$

Pel teorema de Pitàgores,

$$T(R)^2 = TE^2 = PE^2 - MN^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - b.$$



Per tant,

$$x = EA = \left(\frac{\ell}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - b},$$

$$y = BE = \left(\frac{\ell}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - b},$$

FIGURA 7: Resolució grega del problema.

2.2.5 Parlem del diorisma Bar Ȧyya és ben conscient de la necessitat que es compleixi aquest diorisma. Diu:

Sàpigues que si hom et proposa un enunciat, en el qual l'àrea superi el quadrat de la meitat dels costats, és un enunciat fals. És a dir, si hom diu: «Un rectangle l'àrea del qual és 48 i la suma dels costats és 13», sàpigues que és fals, i no has d'esforçar-t'hi, puix que la meitat dels costats és 6 i mig, i el seu quadrat 42 i quart és major que l'àrea.⁶²

Malgrat que Bar Ȧyya diu «no has d'esforçar-t'hi», Cardano, uns quans segles després, a *Ars magna* (1545), planteja dos problemes ben semblants.

Dividir un segment de 10 colzes en dues parts de manera que l'àrea del rectangle que formen és 20 o bé és 40.

El primer problema dona les parts

$$x = 5 + \sqrt{5} \text{ i } y = 5 - \sqrt{5}.$$

És clar que són les solucions correctes, com podem comprovar calculant

$$x + y = (5 + \sqrt{5}) + (5 - \sqrt{5}) = 10.$$

$$x y = (5 + \sqrt{5}) \times (5 - \sqrt{5}) = 25 - 5 = 20.$$

⁶⁰ Per fer-ho, cal usar [50, Ei 10, p. 101-192, Ei 46, p. 146-148, Ei 2, p. 89-90, i P 3, p. 82].

⁶¹ En la terminologia heretada dels geomètres grecs, un *diorisma* és una condició necessària perquè el problema que es planteja tingui solució ([49, p. 271-273] i [50, p. 11-12]).

⁶² [5, §28, p. 42-43]. Es basa, com hem vist, en §28.

Podem fer el mateix amb l'altre cas i obtindrem:

$$x = 5 + \sqrt{-15} \quad \text{i} \quad y = 5 - \sqrt{-15}.$$

Aleshores diu:

Obviant les tortures mentals, multipliquem $5 + \sqrt{-15}$ i $5 - \sqrt{-15}$. Obtenim $25 - (-15) = 40$.⁶³

Toca amb el capciró dels dits els «nombres complexos», però se li escapen. Afirmar:

El punt final dels resultats aritmètics és *tan subtil com inútil*.⁶⁴

La raó d'aquesta afirmació és deguda a la situació següent: quin sentit té acceptar una solució numèrica⁶⁵ d'un problema que geomètricament no té sentit?

De fet, no es podia anar més lluny sense analitzar la resolució de les equacions cúbiques.⁶⁶

2.2.6 Alguns teoremes i les seves demostracions L'obra de Bar Ȧiyya conté alguns teoremes força rellevants dels *Elements*, molts d'ells, però, sense demostració.

En recollim alguns indicant si van acompanyats de demostració o no.

Els del llibre II, que ja hem esmentat, els enuncia i en fa una *mostració* numèrica com a §28, que hem reproduït a la pàgina 121. No són autèntiques demostracions.

A §33 Bar Ȧiyya enuncia i demostra la propietat de la potència d'un punt intern d'un cercle. En fa una demostració molt curiosa, diferent de la d'Euclides, però correcta.⁶⁷

A §35 proporciona l'enunciat del teorema de Tales en la forma: «Els triangles semblants tenen els costats corresponents proporcionals». No el demostra.⁶⁸

De §36 a §41 aplega els resultats que són la base de l'ús del tangram amb un esbós de demostració.⁶⁹

A §46 dona la demostració del teorema de Pitàgores per tangram seguint Ei 47, però l'enuncia en els termes següents:

Com podem determinar la diagonal d'un rectangle de costats coneguts?

A §50 en fa una aplicació concreta, quan els costats tenen 8 i 6 colzes.⁷⁰

63 [61, p. 67-69].

64 [61, p. 67-69]. L'èmfasi és nostre.

65 Cardano disposa ja d'una nomenclatura algebraica més àgil que l'estrictament basada en la descripció amb paraules.

66 Això és el que faria Bombelli.

67 [5, §28, p. 23-25]. Correspon a EIII 35 ([50, p. 232-233]).

68 [5, §33, p. 26]. Correspon a EVI, 4 ([50, p. 303]).

69 [5, §36 a §41, p. 27-30]. Corresponen a Ei, 35 a 38 ([50, p. 134-141, i la nota 460]).

70 [5, §46 i §50, p. 34-36 i 39-41]. Corresponen a Ei 47 ([50, p. 149-151]).

En el cas dels triangles obtusangles dona el teorema de Pitàgores generalitzat sense demostració.⁷¹ De fet, és un «element» de la determinació de l'altura del triangle.⁷²

Per acabar, proporciona la fórmula d'Heró per determinar l'àrea *S* d'un triangle del qual es coneixen els costats *a*, *b*, *c*, en la forma

$$S = \sqrt{\frac{a + b + c}{2} \times \frac{-a + b + c}{2} \times \frac{a - b + c}{2} \times \frac{a + b - c}{2}}.$$

L'aplica a un cas concret i diu:

Aquest càlcul es basa en la Geometria, la qual en dona una demostració que no podem ni hem d'exposar ací, ja que has vist que el resultat del càlcul és cert.⁷³

Aquest resultat no es troba, però, als *Elements* d'Euclides i rep el nom de *fórmula d'Heró*, perquè Heró el demostra a la *Mètrica*. Tanmateix, els matemàtics àrabs l'atribueixen a Arquímedes ([52, p. 167-168]).

2.3 Les taules de dependències i d'influències

Recollim breument en quins autors i obres s'inspira Bar  ıyya i en quins va influir.

2.3.1 Euclides i el *Llibre de geometria* Al *Llibre de geometria* Bar  ıyya fa referència a Euclides en algunes ocasions, però, molt més importants encara, en els capítols I i II s'inspira en els *Elements*,⁷⁴ com palesa la taula següent:

<i>Elements</i>	Definicions	Proposicions
Llibre I	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12 15, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34	33, 34,35, 36 37, 38, 41, 47
Llibre II	1	2, 4, 5, 6,7, 9, 10
Llibre III		35
Llibre V	3	
Llibre VI		1, 2, 4, 18
Llibre VII	1, 2 15, 16, 18, 19	
Llibre XI	1, 2	

Taula 3: La influència de l'obra d'Euclides en el *Llibre de geometria*.

71 [5,  69, p. 57-58]. Corresponen a EII 12 ([50, p. 149-151]).
72 En el cas del triangle acutangle també usa aquesta propietat adaptada però de forma implícita ([5,  64a, p. 53-54, en particular, p. 54]). Es corresponen amb EII 12 i EII 13 ([50, p. 177-179]).
73 [5,  73, p. 59-60].
74 Algunes definicions i enuncisats dels teoremes són idèntics; d'altres estan lleugerament modificats. A l'excel lent edició catalana [38] s'anoten tots.

I, al llibre III, recull alguns dels problemes de *divisions* d'Euclides,⁷⁵ com palesa la taula següent:

Euclides	Bar Ḥiyya ⁷⁶	Euclides	Bar Ḥiyya
Divisió 1	§130, p. 96–97	Divisió 16	{ §138, p. 138 §139, p. 138–139
Divisió 2	{ §129, p. 96 §131a, p. 98–99	Divisió 15	§145, p. 109
Divisió 3	§132, p. 96 ⁷⁷	Divisió 28	§149, p. 110–111
Divisió 6	§135a, p. 102–103	Divisió 29,	§150, p. 111

Taula 4: Divisió de figures.

2.3.2 Al-Hwārizmī i el Llibre de geometria L'obra de Savasorda i les seves traduccions posen de manifest que la influència la va rebre del món musulmà. Recordem que l'any en què Plató de Tívoli traduïa el *Hibbūr* de Bar Ḥiyya, Robert de Chester ho feia amb l'*Hissab al'jabr wa-l-muqā-bala*, [1], d'al-Hwārizmī.⁷⁸ Hi llegim:

[...] Allò que és fàcil i més útil en aritmètica, de manera que les persones ho requereixen constantment en casos d'herència, llegats, particions, judicis i comerç, i en tots els seus tractes amb els altres, o quan es tracta de la mesura de les terres, excavació de canals, càlculs geomètrics, i altres objectes de diverses classes i tipus.⁷⁹

Aquest és el tractat d'àlgebra damunt el qual es va bastir l'àlgebra islàmica⁸⁰ i l'europea fins a meitat del segle XVIII.

En aquesta exposició usem la paraula *àlgebra* en el sentit de l'obra d'al-Hwārizmī, és a dir, com un càlcul o una algorísmica. Indiquem que, de fet, l'àlgebra s'inicia amb la resolució de les equacions de segon grau, amb l'aparició de radicals en l'àmbit aritmètic i del compàs en el geomètric, com hem indicat a §2.2.4. De fet, les equacions de primer grau, com hem vist a §2.1.2, equivalen a la regla de tres, que, al seu torn, ho són a la proporcionalitat. De manera anàloga, §2.2.2, que hem etiquetat com a «Les relacions algebriques», conté relacions

75 Adoptem el recull de Woepcke que es troba a [4, p. 30–77], i la paginació corresponent. Val a dir que, com veiem a [38], el recull d'Ofterdinger, [47], és molt més acurat, però no hem pogut consultar-lo.

76 La paginació correspon a [38].

77 Són problemes que demanen dividir el triangle en tres parts iguals, però el d'Euclides ho fa generalitzant la divisió 1, és a dir, amb rectes paral·leles a la base; en canvi, Bar Ḥiyya ho fa determinant el baricentre. No és, doncs, una còpia del d'Euclides.

78 Recordem que els termes *al-jabr* i *wa-l-muqā-bala* signifiquen, respectivament, 'restauració' i 'reducció'. És a dir, la traducció catalana del títol del tractat d'al-Hwārizmī és *Llibre condensat del càlcul per restauració i reducció*.

79 [56, p. 2]. Compareu aquest text amb el de Bar Ḥiyya (p. 116).

80 S'estableixen els algorismes de resolució dels tres tipus d'equacions de segon grau.

numèriques en les quals intervenen quadrats que, en l'àmbit de la geometria, corresponen a àrees.

Però el primer autor que la transmet, en hebreu primer i en llatí després a través de la traducció de Plató de Tívoli, és Bar Ḥiyya.

Al-Hwārizmī també va aportar l'escriptura numèrica posicional que havien adoptat els matemàtics indis ([2]). Però Bar Ḥiyya, pel que sabem, no es va preocupar d'aportar aquesta nova tècnica numèrica. Ben al contrari. Diu:

Respecte a la ciència dels nombres (Aritmètica), malgrat la seva gran utilitat per les coses del món i de la Lleï, com que no és difícil, i la majoria de la gent l'entén poc o molt, no ha calgut que hom n'escrivís un llibre en llengua santa; en canvi, la ciència de la mesura (Geometria) és tan útil com l'Aritmètica, però és difícil i inassequible per a la majoria de la gent, i per això cal explicar-la i posar-la a l'abast. És indispensable per al mesurament de les terres, per a la partició entre els hereus i consocis, de manera que hom no pot portar a cap aquests afers sinó basant-se en aquesta ciència.⁸¹

Aquesta afirmació solament és certa si els nombres que es manegen són petits. Però, si els volem més grans, l'ús de l'escriptura numèrica alfabètica, com la fenícia, la copta, la grega, la jueva, etc., no és gaire útil i difícilment manejable. Al llibre de Bar Ḥiyya, els nombres són sempre molt petits.

2.3.3 El Llibre de geometria i Leonardo da Pisa El segle XIII és el segle en el qual els diversos estats de l'Europa territorial —l'Europa postromana— aconseguixen establir-se políticament i inicien un renaixement intel·lectual i cultural fruit d'un doble vessant: el grec i l'àrab. És el segle de prohoms que inicien el canvi de rumb del pensament occidental: Dant, Llull, Tomàs d'Aquino, Boccaccio i Petrarca, entre altres. I també de Leonardo da Pisa, conegut com a Fibonacci, que publicaria obres de matemàtiques d'una gran rellevància que donaven a conèixer el sistema de numeració indoaràbiga que els àrabs havien adaptat de l'indi, i l'àlgebra, totalment de rel aràbiga. Aquesta herència —l'aritmètica i l'àlgebra basada en la geometria— la recull el pisà en dues obres, *Liber abaci* i *La practica geometriæ*.⁸²

El primer llibre es considera l'inici de la matemàtica occidental llatina. Malgrat que, com a fill del comerciant de Pisa Bonacci, Leonardo l'havia pensat com una eina útil per als comerciants, el text era massa extens per a l'època i no va tenir la difusió que hauria hagut de tenir. A més, estava escrit en llatí, una llengua que coneixien els clergues i els erudits, però no pas els comerciants. Caldria esperar a mitjan segle XV l'aparició de les *aritmètiques comercials* adreçades als comerciants i, per aquesta raó, eren escrites en la llengua vernacle de cada regió. En el cas de Catalunya s'ha conservat *L'arismetica* de Santcliment.⁸³

⁸¹ [5, p. 5]. Vegeu l'observació de la p. xxiii de la introducció.

⁸² Les recull Boncompagni a [21] i [22].

⁸³ D'aquest text se'n conserva un incunable a la Biblioteca Nacional de Catalunya: sala de reserva ([58, 9-v-20]).

En canvi, *La practica geometriæ* troba la seva inspiració en el text de Bar Hiyya, com posa de manifest Curtze tant a la introducció com al llarg de l'obra.⁸⁴

Aquesta afirmació es fonamenta en tres fets:⁸⁵ l'estructura del llibre, la dualitat àlgebra/divisions i els problemes concrets que proposa.

2.3.3.1 L'estructura del llibre de Bar Hiyya

El capítol II de l'obra de Bar Hiyya —«Del mesurament de les terres»— s'estructura en cinc parts:⁸⁶

Part primera (del paràgraf §43 al §57), «Del mesurament dels quadrilàters que tenen llurs costats iguals i dels que tenen llurs angles iguals»:

- El quadrat.⁸⁷
- Qüestions relatives al rectangle.⁸⁸
- Qüestions relatives al rombe.⁸⁹

Part segona (del paràgraf §58 al §73), «De la mesura dels triangles»:

- A) Triangles equilàters.
- B) Triangles isòsceles.
- C) Triangles escalens.
- D) Triangles rectangles.
- E) Triangles obtusangles.⁹⁰

Part tercera (del paràgraf §74 al §94a), «Del mesurament dels quadrilàters els costats dels quals no són tots iguals ni els angles no són tots rectes»:

- Classe primera.⁹¹
- Classe segona.⁹²

Part quarta (del paràgraf §95 al §123), «Explicació de la mesura dels terrenys de forma circular completa, o semicircular, o més o menys semicircular».⁹³

Part cinquena (del paràgraf §124 al §128), «Del mesurament de les figures que excedeixen els quatre costats».⁹⁴

84 [20]. No cal dir que l'acurada edició catalana [38] ho anota.

85 Hem de tenir present, no obstant això, que els separa un segle: *Ḥibbur ha-mēšīḥā wē-ha-tišboret* (1117) i *De practica geometriæ* (1220).

86 Com ja hem indicat, és un llibre algebràic.

87 Hi analitza cinc problemes i el teorema de Pitàgores. Hi trobem les tres equacions de segon grau: $x^2 - 4x = 21$, $x^2 + 4x = 77$ i $4x - x^2 = 3$ [§47, §48 i §49].

88 Hi analitza cinc problemes i novament el teorema de Pitàgores.

89 No hi dona una entrada específica, però hi analitza tres problemes.

90 Hi tracta també l'acutangle i és on proporciona la fórmula d'Heró.

91 Engloba quatre formes diferenciades, A), B), C) i D). Les dues darreres formes les especifica amb un títol.

92 Tracta d'un quadrilàter genèric dels quals «no es pot trobar la seva àrea sinó mitjançant els triangles en què el descomponem».

93 Consta de dos apartats, però el podríem classificar en quatre perquè és on introdueix l'estudi de les cordes i de les sagetes i la taula d'arcs i cordes.

94 En aquesta part estudia dos exemples de terrenys inclinats, l'un recte i l'altre circular.

El capítol III (del paràgraf §129 al §151) —«Sobre l'explicació del que es refereix a la divisió de les àrees»⁹⁵ consta de les parts següents:

- Procediments per dividir els quadrilàters.⁹⁶
- Divisió dels quadrilàters en dues parts.⁹⁷
- Divisió dels quadrilàters en tres parts.⁹⁸
- Divisió dels quadrilàters en quatre parts.⁹⁹

El capítol IV (del paràgraf §152 al §179)—«Del mesurament dels cossos».¹⁰⁰

2.3.3.2 L'estructura del llibre de Leonardo da Pisa¹⁰¹

Capítol 1 «Mсурament d'àrees de camps rectangulars».

- 1.1 Àrea de quadrats.
- 1.2 Àrea de rectangles.

Capítol 3 «Mсурament de tota mena de camps».

- 3.1 Mсурament de triangles.¹⁰²
- 3.2 Mсурament de quadrilàters.¹⁰³
- 3.3 Mсурament del cercle i les seves parts.
- 3.4 Mсурament de camps sobre una muntanya.

Capítol 4 «Divisió de camps entre diversos propietaris».

- 4.1 De múltiples costats.
- 4.2 De cercles.

Capítol 6 «Determinació de les dimensions dels cossos».

- 6.1 Definicions.
- 6.2 Piràmides i cons.
- 6.3 Esferes.

95 Com ja hem indicat, és un llibre geomètric.

96 Consta de sis parts.

97 Consta de tres parts.

98 Consta de dues parts.

99 Consta de tres parts i la tercera es refereix a quadrilàters amb costats corbats.

100 Consta de tres classes. D'aquesta part, n'ometrem l'anàlisi comparativa.

101 Aquesta síntesi, molt breu, es basa en la «Taula de continguts» de [31]. Els capítols 2 i 5 fan referència als càlculs d'arrels quadrades i cúbiques, dues qüestions que no apareixen a l'obra de Savasorda.

102 Hi ha el teorema de Pitàgores, els triangles rectangles, acuntangles i obtusangles, i la fórmula d'Heró.

103 Presenta tots els casos: quadrats, rectangles, trapezis, rombes, romboides. En aquest paràgraf proporciona la resolució de les tres equacions de segon grau: (91) $x^2 - 4x = 77$, (93) $4x - x^2 = 3$, (94) $12x = x^2 + 27$.

<i>Llibre de geometria</i>	<i>La practica geometriæ</i>	<i>Llibre de geometria</i>	<i>La practica geometriæ</i>
§43, p. 32-33	1 (1), p. 14	§80, p. 63-64	3 (172), p. 411
§44, p. 35	1 (2), p. 14-15	§81, p. 64	3 (177), p. 144
§45, p. 35	3 (148), p. 131-132	§82, p. 64-65	3 (177), p. 144
§46 A), p. 34	3 (86), p. 108	§83, p. 64	3 (177), p. 144
§46 B), p. 35-36	3 (88), p. 109	§83, p. 54	3 (177), p. 144
§47 C), p. 36-37	3 (91), p. 110-111	§84, p. 65-66	3 (175), p. 143
§48 D), p. 37-38	3 (89-90), p. 109-110	§85, p. 66-67	3 (172), p. 141-142
§49 E), p. 38-39	3 (93-94), p. 111-112	§86, p. 67	3 (174), p. 142
§50 A), p. 38-40	3 (107), p. 116	§87, p. 67-68	3 (172), p. 141
§51 B), p. 41-42	3 (110), p. 118	§88, p. 68	3 (176), p. 143
§52 C), p. 42-43	3 (108.1), p. 116-117	§89, p. 68	3 (176), p. 143
§53 D), p. 43-44	3 (113), p. 119	§90, p. 68	3 (180), p. 145-146
§54 E), p. 44-45	3 (111), p. 118	§91, p. 69	3 (180), p. 145-146
§55 A), p. 45-46	3 (148), p. 131-132	§92, p. 69	3 (180), p. 145-146
§56, p. 46	3 (148), p. 131-132	§93, p. 69-70	3 (181), p. 146
§57, p. 46-47	3 (148), p. 131-132	§93a, p. 70	3 (181), p. 146
§58, p. 47-48	3 (16), p. 72	§94, p. 70-71	3 (183), p. 147-148
§58a), p. 48	3 (16 i 14), p. 71 i 72	§94a, p. 71	3 (181), p. 147-148
§59, p. 49	3 (17), p. 72	§95, p. 71-72	3 (188), p. 151
§60, p. 49-50	3 (20), p. 74-75	§95, p. 71-72	3 (191), p. 152-153
§61, p. 40-51	3 (16), p. 72	§96, p. 73-74	3 (192), p. 153-154
§64, p. 52-54	3 (18), p. 73	§97, p. 74-75	3 (192), p. 153-154
§64a, p. 54-55	3 (19), p. 74	§99, p. 75	3 (190), p. 152
§67, p. 52-54	3 (7), p. 68	§101, p. 76	3 (190), p. 153-154
§67a, p. 54-55	3 (7), p. 69	§103, p. 77	3 (221), p. 163-164
§68, p. 52-54	3 (9), p. 69-70	§108, p. 79	3 (222), p. 164
§68a, p. 54-55	3 (27), p. 78	§108, p. 79	3 (222), p. 164
§70, p. 57-58	3 (27), p. 78	§108, p. 79	3 (223), p. 165
§70a, p. 57-58	3 (30), p. 80	§111, p. 80	3 (224), p. 165
§73, p. 59-60	3 (31), p. 80-81	§113, p. 81-83	7 (211-219), p. 354-355 ¹⁰⁴
§74, p. 60-61	3 (165), p. 137-138	§125, p. 88-89	3 (184), p. 148-149
§76, p. 61-62	3 (169), p. 139	§125a, p. 88-89	3 (184), p. 148-149
§78, p. 62-63	3 (170), p. 140	§127, p. 91-93	3 (243), p. 176
§79, p. 63	3 (171), p. 140-141	§128, p. 93-95	3 (245), p. 178

TAULA 5: La influència del *Llibre de geometria* en *La practica geometriæ*.

Amb aquesta exposició queda palesa la dualitat que ja hem comentat abans i que consisteix a tractar en el mateix text problemes que es resolen algebraicament i uns altres geomètricament.

I, finalment, la presentació detallada dels problemes té molt en comú i, fins i tot, alguns es concreten amb les mateixes dades.¹⁰⁵

¹⁰⁴ Tots dos donen una taula d'arcs i cordes, però la metodologia del còmput difereix. Fibonacci recorre a la taula de cordes de Ptolemeu però Bar Hiyya, no.

¹⁰⁵ Val a dir que, en molts d'ells, es recorre al teorema de Pitàgores i s'usen els de costats 3, 4 i 5, o múltiples i els de costats 5, 12 i 13.

Pel que fa als algebraics, vegeu la taula 5.¹⁰⁶
Quant a la divisió de figures, recordem la relació d'Archibald de les *divisions* a les obres d'Euclides i de Leonardo ([4, p. 13]). Les divisions de l'obra de Leonardo les donarem d'acord amb la numeració de Favaro ([26]) i la paginació de Boncompagni ([15]) i també d'acord amb la numeració i paginació de Hughes ([31]).

Euclides		Leonardo	Euclides		Leonardo
Div. 1	5, p. 119	7, p. 19	Div. 2	14, p. 122	12, p. 204
Div. 3	{ 1, p. 110	2, p. 188	Div. 4	23, p. 125	24, p. 211
	2, p. 111	1, p. 186			
Div. 5	33, p. 134	34, p. 225	Div. 6	16, p. 123	16, p. 206
Div. 7	20, p. 124	21, p. 209	Div. 8	{ 27, p. 128	27, p. 215
Div. 9	{ 30, p. 133	32, p. 223		28, p. 128	27, p. 215
	31, p. 133	32, p. 223	Div. 10	18, p. 124	19, p. 208
Div. 11	—	—	Div. 12	28, p. 129	29, p. 217
Div. 13	33, p. 134	—	Div. 14	36, p. 138	37, p. 231
Div. 15	40, p. 140	40, p. 235	Div. 16	37, p. 138	37, p. 232
Div. 17	39, p. 140	41, p. 235	Div. 18	—	—
Div. 19	3, p. 115	3, p. 192	Div. 20	10, p. 121	10, p. 202
Div. 21	—	—	Div. 22	—	—
Div. 23	—	—	Div. 24	—	—
Div. 25	—	—	Div. 26	4, p. 116	4, p. 195
Div. 27	11, p. 121	11, p. 202	Div. 28	57, p. 148	60, p. 252
Div. 29	51, p. 146	54, p. 219	Div. 30	—	—
Div. 31	—	—	Div. 32	29, p. 131	31, p. 221
Div. 33	35, p. 137	32, p. 223	Div. 34	40, p. 140	42, p. 237
Div. 35	—	—	Div. 36	—	—

TAULA 6: Les divisions d'Euclides en l'obra de Leonardo.

Com podem veure, comparant aquesta taula amb la taula 4, el matemàtic de Pisa s'ajusta molt més a *divisions* d'Euclides que no pas l'erudit de Barcelona.

2.4 La dualitat de l'obra geomètrica

Per tal de veure fins a quin punt el text no és només un llibre de geometria aplicada, és a dir, d'utilitat pràctica, sembla adequat i necessari analitzar-ne dos problemes, un d'algebraic i un de geomètric.

¹⁰⁶ Usem els capítols de l'edició anglesa de l'obra de Fibonacci [31], més abastable, i així 1[1] significa [1] del capítol 1 i 3[148], [148] del 3. Aquesta obra, tanmateix, recull, molt acuradament, les referències en altres edicions.

2.4.1 Un problema geomètric resolt algebraicament

Analitzem el problema concret:

§63. Si es diu: El costat igual d'un triangle isòsceles fa 15 i l'àrea 108, quina serà la longitud de la base i de l'altura?

- [1.] Dobla l'àrea. Tindràs 216.
- [2.] Resta-ho del quadrat del costat, o sigui 225, i tindràs de resta 9.
- [3.] L'arrel quadrada és 3, que és la diferència entre l'altura i la meitat de la base.
- [4.] Pren la meitat de 3.
- [5.] Eleva-ho al quadrat i serà $2 \frac{1}{4}$.
- [6.] Suma-ho a l'àrea i tindràs 110 i $\frac{1}{4}$.
- [7.] L'arrel quadrada del qual és $10 \frac{1}{2}$.
- [8.] Si hi sumes la meitat de la diferència 3, tindràs 12, que n'és l'altura.
- [9.] I, si ho restes, tindràs la meitat de base ([5, §63, p. 51]).

Com podem veure, Bar Ḥiyya «procedeix» però no explica per què s'ha de procedir així i no d'una altra manera. Tanmateix, conclou el text amb les paraules:

Aquests principis deriven dels del rectangle que ja coneixem.¹⁰⁷

Usem termes algebraics per veure que efectivament és un procediment correcte.

- Tenim un triangle isòsceles $\triangle ABC$.
- En coneixem l'àrea S i el costat a .
- Volem saber quant valen la base i l'altura, que anomenem b i h .

Sabem que

$$S = \frac{1}{2} b \times h,^{108}$$

$$a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2.^{109}$$

Ara operem seguint fil per randa els passos de Bar Ḥiyya i obtenim:

¹⁰⁷ [5, p. 52].

¹⁰⁸ [5, §64, p. 52]. Aplica la fórmula que determina l'àrea d'un triangle del qual coneixem la base i l'altura ([5, §58, p. 47]).

¹⁰⁹ Teorema de Pitàgores a [5, §61, p. 50]. De fet, Bar Ḥiyya diu: $h^2 = a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

	Símbols actuals	Càlculs de Bar Ғiyya
1	$2S = b \times h$	$2 \times 108 = 216$
2	$a^2 - 2S = \left\{ \begin{array}{l} (\frac{b}{2})^2 + h^2 - b \times h \\ = (h - \frac{b}{2})^2 \end{array} \right\}_{110}$	$225 - 216 = 9$
3	$\sqrt{a^2 - 2S} = h - \frac{b}{2}$	$\sqrt{9} = 3$
4	$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2S} = \frac{h}{2} - \frac{b}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{9} = 1 + \frac{1}{2}$
5	$(\frac{h}{2} - \frac{b}{4})^2$	$(1 + \frac{1}{2})^2 = 2 + \frac{1}{4}$
6	$S + (\frac{h}{2} - \frac{b}{4})^2 = (\frac{h}{2} + \frac{b}{4})^2_{111}$	$108 + 2 + \frac{1}{4} = 110 + \frac{1}{4}$
7	$\sqrt{S + (\frac{h}{2} - \frac{b}{4})^2} = \frac{h}{2} + \frac{b}{4}$	$\sqrt{110 + \frac{1}{4}} = 10 + \frac{1}{2}$
8	$(\frac{h}{2} + \frac{b}{4}) + (\frac{h}{2} - \frac{b}{4}) [= h]$	$(10 + \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{2}) = 12$
9	$(\frac{h}{2} + \frac{b}{4}) - (\frac{h}{2} - \frac{b}{4}) [= \frac{b}{2}]$	$(10 + \frac{1}{2}) - (1 + \frac{1}{2}) = 9$

TAULA 7: Els càlculs de Bar Ғiyya formalitzats.

Creiem que amb aquest exemple queda aclarida la manera com Bar Ғiyya usa les igualtats que ha establert al capítol primer i que hem resumit a la taula 2.

2.4.2 Un problema geomètric —una divisió— resolt per tangram Veiem ara la penúltima divisió que ofereix Bar Ғiyya (figura 8):

§149 Considerem $\triangle ABC$, que s'anomena «figura trencada».

La volem dividir en dues parts iguals.

- [1.] Tracem la recta AC i la dividim per la meitat E .¹¹²
- [2.] Per aquest punt tracem la perpendicular fins a trobar l'arc AC en Z .¹¹³
- [3.] Unim E amb B i tenim les dues parts buscades, dividides per la recta BEZ , o bé per les rectes EZ i EB .¹¹⁴

Suposem que volem dividir el cas escalè amb un segment rectilini i no pas amb un segment trencat:

§150 Es pot dividir el sector circular d'una altra manera.

110 [5, §27, p. 17-18]. Correspon fil per randa a EII 4 ([50, p. 160-162]).
111 [5, p. 52]. Usa [5, §28, p. 18], que correspon a EI 5 ([50, p. 33, i 162-163]).
112 Es pot fer amb regla i compàs: P 1 i EI 10 ([50, p. 82 i 101-102]).
113 Es pot fer amb regla i compàs: EI 11 i P 2 ([50, p. 102-103 i 82]).
114 Bar Ғiyya distingeix el cas isòsceles, en el qual AB i BC són iguals, i el cas escalè, en el qual AB i BC són diferents ([5, p. 110-111]). La certesa d'aquesta afirmació es basa en EI 38 —que correspon a l'ítem §37 ([5, p. 17-18)]—, i en EII 30, que Bar Ғiyya no esmenta ([50, p. 137-138 i 223-224]).

- [1.] Unim B i Z [P 1] (primer postulat).
- [2.] La dita recta trenca a AC per T [P 5].
- [3.] Cercarem la relació entre TE i AE .
- [4.] I prendrem a BC segons l'anterior proporció o sigui fins a H [EVI 10] ([50, p. 316-317]).
- [5.] Unirem Z i H [P 1].
- [6.] I tindrem les dues parts iguals cerques, o sigui, $\triangle ZHC$ i $\triangle BHZA$.

La prova d'això és la següent:

Els triangles $\triangle BHZ$ i $\triangle ZHE$ estan entre segments paral·lels,¹¹⁵ i tenen la mateixa base.

Per tant, són iguals ([5, §150, p. 111]).

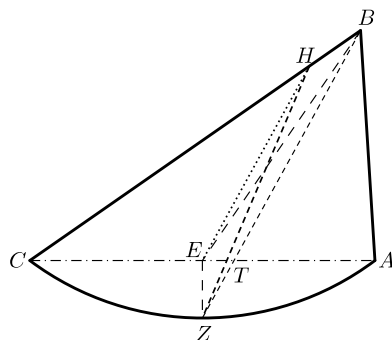


FIGURA 8

En definitiva, el trapezi corbat $\triangle BHZA$ equival al trapezi corbat $\triangle BEZA$ menys el triangle $\triangle BEZ$ més el $\triangle BHZ$ i tot plegat equival a una meitat del sector $\triangle BCZA$.¹¹⁶

Fixem-nos en l'enorme diferència que hi ha entre aquest problema i l'anterior. Aquí les dimensions concretes de les figures no intervenen per a res. Es fan servir peces geomètriques equivalents a fi d'obtenir àrees equivalents de les quals desconeixem el valor.

És precisament això el que volem remarcar perquè posa de manifest dos fets que ja hem indicat abans. El text de Bar Hiyya no és només un text de geometria aplicada —numèrica—, sinó que conté algunes qüestions de geometria teòrica. No hi ha, doncs, una unitat de criteri en aquesta obra tan primerenca. Conté una primera part que, basant-se en resultats geomètrics molt concrets, resol problemes geomètrics numèricament usant les equacions de segon grau. Els algorismes emprats són absolutament generals. I una altra part que, usant tangram, permet mostrar de quina manera podem dividir certes figures geomètriques en parts prefixades.

2.5 Els lligams entre l'àrea del cercle i la longitud de la circumferència

2.5.1 Antecedents Com hem vist abans, al papir Rhind es planteja la «quadratura del cercle» i és el text més antic de què disposem que tracta aquesta qüestió. També va preocupar els matemàtics grecs ([48, §1.10.2, p. 99-100]).

¹¹⁵ Bar Hiyya no estableix la proposició que diu que, atès que AH és a CE com HB a TA , els segments HB i BZ són paral·lels [EVI 2, ([50, p. 304-305])].

¹¹⁶ De fet, usa les Nc 2 i Nc 3 dels *Elements* d'Euclides que no esmenta ([50, p. 85]). A $\triangle BZ$ hi sumem, d'una banda, el triangle $\triangle BEZ$ i, d'altra, el $\triangle BHZ$, que, com hem indicat abans, són equivalents.

Finalment, al segle III, Euclides demostra un resultat que ja era conegut per Hipòcrates de Quios.¹¹⁷

Els cercles són com els quadrats dels radis respectius (EXII 2, [51, p. 488-494]).

Quedaven pendents les respostes a aquestes dues preguntes:

1. Són proporcionals la longitud de la circumferència del cercle i el radi?
2. Aquesta relació té alguna mena de lligam amb la que els cercles tenen amb els quadrats dels radis?

El primer matemàtic que respondria aquestes dues preguntes és Arquimedes. Va establir que:

El cercle és equivalent al triangle rectangle de catets el radi del cercle i la longitud de la circumferència.¹¹⁸

I encara, en la mateixa monografia, estableix que

$$3 \frac{10}{71} < \frac{\mathcal{L}}{d} < 3 \frac{1}{7} = \frac{22}{7},$$

en què $\mathcal{L}$ és la longitud de la circumferència i d el seu diàmetre.

2.5.2 El cercle i la circumferència al llibre de Bar Ḥiyya Al *Llibre de geometria* de Bar Ḥiyya hi trobem aquests dos resultats en la mateixa línia que en Arquimedes.

En concret, a la quarta part del capítol II, que té el títol «Explicació de la mesura dels terrenys de forma circular completa, o semicircular, o més o menys semicircular», Bar Ḥiyya es preocupa d'aquestes qüestions. Vegem algunes de les seves aportacions.

D'antuvi explica com aconseguir la longitud de la circumferència i l'àrea d'un cercle.

§95. Es pot saber l'àrea del cercle si es coneix la seva diagonal o diàmetre, en àrab anomenat *cotr*;¹¹⁹ multiplica el diàmetre per 3 i $\frac{1}{7}$ i tindràs la longitud de la circumferència; multiplica després la semicircumferència per la meitat del diàmetre i tindràs l'àrea del cercle.¹²⁰

117 Hipòcrates de Quios (Quios [Grècia], segle IV aC), geòmetra. Va establir la «quadratura de tres lúnules» i la reducció de la «duplicació del cub» a la «determinació de dues mitjanes proporcionals» ([48, §3.4.7, p. 238-249]).

118 Estableix que $S = r \times \mathcal{L}/2$ ([52, §A.8.1 [MC 1], p. 449-450]).

119 De la radical *ctr*.

120 [5, p. 71-72].

En símbols actuals, si d i r designen el diàmetre i el radi del cercle, i $\mathcal{L}_{\text{circumferència}}$ i S_{cercle} que abreguem $\mathcal{L}$ i S la longitud de la circumferència i l'àrea del cercle, tenim que

$$\mathcal{L} = \left(3 + \frac{1}{7}\right) d, \quad S = \frac{1}{2} \mathcal{L} \times \frac{1}{2} d = \left(3 + \frac{1}{7}\right) r^2.^{121}$$

Tot seguit en dona la demostració següent:

La demostració que la longitud de la circumferència és tres vegades i $\frac{1}{7}$ el diàmetre ens la donarà la figura adjunta, en la qual hi ha la circumferència $ABCDEU$,¹²² el diàmetre és AZD ; ara bé, la recta AB és igual a AU i AZ , puix que tots tres són radis del cercle BZU , el centre del qual és A ; de la mateixa manera, en el cercle BZD , seran iguals CD i CB , i el mateix trobaríem respecte de DE i EU ; així és que les sis rectes que toquen la circumferència en sis punts són iguals al radi, i que, per tant, totes juntes equivalen a tres diàmetres. L'arc AB és major que la corda respectiva en una part alíquota, la que computaren els calculadors, i sumant les dels tres arcs trobaren que és igual a $\frac{1}{7}$ del diàmetre.¹²³

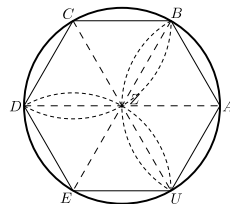


FIGURA 9

2.5.3 Una demostració molt interessant Molt més remarcable és el lligam que estableix entre l'àrea del cercle i el triangle isòscele que té de base la longitud de la circumferència i d'altura el radi. Malgrat que s'assembla molt a la d'Arquimedes —ambdues redueixen l'àrea a la d'un triangle de base la longitud de la circumferència i d'altura el radi—, de fet, són molt diferents.

El siracusà ho fa per doble reducció a l'absurd i es basa en el que actualment s'anomena el *postulat d'Arquimedes* —que s'oposa a l'atomisme— i en el mètode d'exhaustió eudoxià ([52, §A.8.3 [MC 3] p. 451–455]).

En canvi, la demostració de Savasorda es basa en la «proporcionalitat de les longituds de les circumferències i els radis respectius». És atomista (figura 10).¹²⁴

La demostració de l'àrea del cercle és: si s'obre la superfície del cercle per un costat¹²⁵ i s'aplanen totes les circumferències concèntriques de l'interior fins al centre, es convertiran en rectes que aniran disminuint successivament fins a un punt que serà el centre, de manera que en resultarà un triangle, l'àrea del qual serà la meitat de la base —o sigui la circumferència—, per l'altura, o sigui el radi.¹²⁶

¹²¹ [52, §A.8.3 [MC 3], p. 451].

¹²² No és realment una demostració.

¹²³ [5, p. 72].

¹²⁴ És una demostració atomista en la línia de la «paradoxa» de Demòcrit ([48, §3.4.10, p. 253–255]). Vegeu la demostració de Kepler, [32, edició francesa, p. 14–17].

¹²⁵ De fet, per un radi.

¹²⁶ [5, p. 72–73]. Tot seguit ho aplica a un cercle de diàmetre 14. El multiplica per $3\frac{1}{7}$. Obté la circumferència. Multiplica la meitat del diàmetre, 7, per la meitat de la circumferència, 22. Obté 154, que és l'àrea del cercle. Nota: hi ha un error a [38, p. 73].

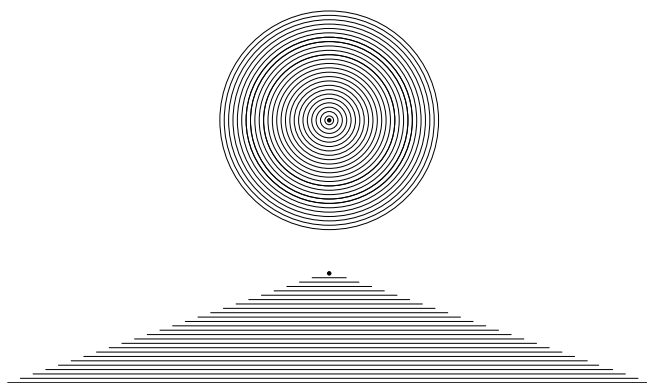


FIGURA 10

2.5.4 Relacions entre l'àrea del cercle, la longitud de la circumferència i el diàmetre

Aquesta qüestió preocupa Bar Ħiyya perquè, a §96, diu:

Hi ha un altre procediment per trobar l'àrea del cercle en el qual no cal conèixer la circumferència, i és elevar al quadrat el diàmetre i restar-ne la setena part i la catorzena part i la resta serà l'àrea.¹²⁷

I en dona una demostració que val la pena que refem ([5, p. 73-74]).

1. Considerem el cercle $ABCD$.
2. Quadrem el diàmetre, $\square AHZC$.
3. Els semicercles HDZ i ADC són iguals.
4. El cercle és menor que el quadrat en dos triangles corbs ADH i CDZ .
5. Fem els càlculs següents.
 - 5.1. L'àrea del quadrat $AHZC := AC^2$ és $14^2 = 196$.
 - 5.2. L'àrea del triangle $\triangle ZDC$ és $\frac{1}{4}196 = 49$.
 - 5.3. L'àrea del sector circular $\angle DTC$ és igual a $\frac{1}{2}DC \times DT$ és $\frac{1}{8}(3 + \frac{1}{7}) \times 14 \times 7 = \frac{77}{2} = 38 + \frac{1}{2}$.¹²⁸
 - 5.4. DC és igual a $\sqrt{7^2 + 7^2} = 9 + \frac{9}{10}$.¹²⁹

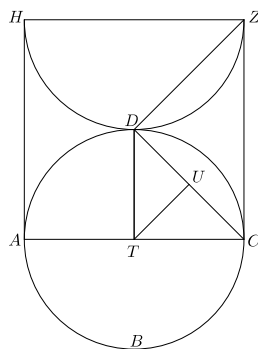


FIGURA 11

¹²⁷ [5, p. 73]. «Així, en el cas anterior, el quadrat del diàmetre és 196; restar-ne el $\frac{1}{7}$ i un $\frac{1}{2}$ del $\frac{1}{7}$, o sigui 42, restarà 154, que és l'àrea ja coneguda». Aquesta expressió la trobem també a [46, p. 3 a].

¹²⁸ Aquest càlcul és curiós, atès que indirectament diu que $S_{\text{cercle}} = (3 + \frac{1}{7})49 = 147 + 7 = 154$. Però $156 = 196 - 42 = 196 - (\frac{1}{7} + \frac{1}{14})196$. I hem acabat la demostració. Però no ho fa així.

¹²⁹ Aquí, d'alguna manera, proporciona el valor de $\sqrt{2}$, atès que $\sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2} = 9 + \frac{9}{10}$. Per tant, $\sqrt{2} = \frac{1}{7}(9 + \frac{9}{10}) = \frac{99}{70} = 1.4142857$.

$$5.5. \quad DU = CU = \frac{1}{2}\sqrt{98} = 4 + \frac{9}{10} + \frac{1}{20}.$$

$$5.6. \quad TU^2 = TC^2 - CU^2 = 7^2 - 24,51 = 25,49 \simeq 25.^{130} \text{ D'on } TU \text{ val } 5.$$

$$5.7. \quad \text{L'àrea del triangle } \triangle TDC = \frac{1}{2}TU \times DC = 5 \left(4 + \frac{1}{2} + \frac{9}{20}\right) = 24 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sim 24 + \frac{1}{2}.$$

$$5.8. \quad \text{Aleshores, } \triangle DC = \triangle TDC - \triangle TDC = 38 + \frac{1}{2} - (24 + \frac{1}{2}) = 14.$$

$$5.9. \quad \text{Per tant, } \triangle DC + \triangle DZ = 14 + 14 = 28.$$

$$5.10. \quad \text{En definitiva, } \triangle DCZ - (\triangle DC + \triangle DZ) = 49 - 28 = 21. \text{ I el doble fan } 24.$$

$$5.11. \quad 24 = \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{14}\right)196 = 28 + 14.^{131}$$

I encara proporciona quatre resultats més que val la pena fer notar:

§97. Però els qui aprofundeixen en això, i són els astrònoms, diuen que la raó de la circumferència al diàmetre és de 3 i $\frac{8\frac{1}{2}}{60}$ del diàmetre,¹³² així és que, segons ells, l'àrea del cercle es trobarà, restant del quadrat del diàmetre la seva quarta part menys 8 parts i mitja de 60 compreses en la dita quarta part anterior.¹³³

§98. Si es coneix l'àrea del cercle i es vol saber la longitud del diàmetre, se sumaran a l'àrea les seves $\frac{3}{11}$ parts, i obtindrà el quadrat del diàmetre.¹³⁴

§99. Si sabem la circumferència i volem conèixer el diàmetre, prendrem cinc parts de la meitat,¹³⁵ o bé es dividirà la circumferència per $3 + \frac{1}{7}$ i es trobarà el diàmetre.¹³⁶

§100. Si es coneix l'àrea del cercle i es vol conèixer la circumferència, es sumará a l'àrea $\frac{3}{11}$ parts i multiplicant l'arrel de la suma per 3 i $\frac{1}{7}$, tindrem la circumferència.¹³⁷

En terminologia actual, fa això:

§97. $\frac{\mathcal{L}}{d} = 3 + \frac{8 + \frac{1}{2}}{60} = 3 + \frac{17}{120}$ i és clar que $\frac{17}{120} \simeq \frac{17}{119} = \frac{1}{7}$, que és el valor que havia donat a §95.

En aquest cas afegeix que S es troba fent el càlcul següent:

$$d^2 - \left(\frac{d^2}{4} - \frac{8 + \frac{1}{2}}{60} \frac{d^2}{4} \right).^{138}$$

130 El quadrat de $4 + \frac{9}{10} + \frac{1}{20}$ és $16 + \frac{81}{100} + \frac{1}{400} + \frac{72}{10} + \frac{8}{20} + \frac{18}{200} = 16 + \frac{324}{400} + \frac{1}{400} + \frac{2880}{400} + \frac{160}{400} + \frac{36}{400} = 16 + \frac{3401}{400} = 16 + 8.52 = 24.52 \sim 25$.

131 Ha establert, doncs, que $S_{\text{cercle}} = 4r^2 - \left(\frac{4r^2}{7} + \frac{ar^2}{14}\right) = \frac{44}{14}r^2 = (3 + \frac{1}{7})r^2$, com volia.

132 Fixem-nos que 3 i $\frac{8\frac{1}{2}}{60}$ és 3 i $\frac{17}{120}$ i $\frac{17}{120} \sim \frac{1}{119} = \frac{1}{7}$.

133 [5, p. 74].

134 [5, p. 75].

135 És erroni. Ha de dir «cinc vuitenes parts».

136 [5, p. 75].

137 [5, p. 75].

138 I això és cert, atès que, de $\frac{\mathcal{L}}{d} = 3 + \frac{8 + \frac{1}{2}}{60} = 3 + \frac{17}{120}$, en resulta que $\mathcal{L} = (3 + \frac{17}{120})d$ i, per tant, $S = (3 + \frac{17}{120})r^2 = \frac{1}{4}(3 + \frac{17}{120})d^2 = (\frac{3}{4} + \frac{17}{480})d^2 = (\frac{3}{4} + \frac{177}{480})d^2 = d^2 - (\frac{1}{4}d^2 - \frac{8 + \frac{1}{2}}{60} \frac{1}{4}d^2)$.

§98. Es coneix $S = \frac{3+\frac{1}{2}}{4} d^2 = \frac{22}{28} d^2 = \frac{11}{14} d^2$. O sigui, $d^2 = \frac{14}{11} S = (1 + \frac{3}{11}) S$.

Finalment, $d = \sqrt{S + \frac{3}{11} S}$.

§99. Coneixem la circumferència $\mathcal{L} = (3 + \frac{1}{7}) d$. Per tant, $d = \frac{\mathcal{L}}{3+\frac{1}{7}} = \frac{7}{22} \mathcal{L} = 0,318 \mathcal{L}$.¹³⁹

§100. Coneixem l'àrea S del cercle i busquem la longitud $\mathcal{L}$ de la circumferència.¹⁴⁰

Aquest resultat l'estén a l'el·lipse i dona el resultat que trobem a la proposició 5 de *Dels conoides i els esferoides* d'Arquimedes ([52, p. 416-418] o [36, p. 48-49]). Compara l'àrea de l'el·lipse d'eixos a el gran i b el petit amb la del cercle de radi a .¹⁴¹ Diu que l'àrea és igual a la del rectangle de costats a i b menys la seva $\frac{1}{7} + \frac{1}{14}$ part.¹⁴²

Veiem, doncs, que aquesta és una qüestió que preocupava Bar ̤iyya i a la qual dedica molta atenció. I, com dèiem, encara va més lluny.

2.5.5 L'àrea d'una el·lipse A l'inici de §112, Bar ̤iyya diu ([5, p. 80]):

Si el camp no és de forma circular sinó ovalada talment com seccions del cilindre, no tallades paral·lelament a la base, tindrem en la dita figura dos diàmetres, un d'ells major que l'altre, i prendrem llurs meitats i les multiplicarem una per l'altra i restarem del producte la $\frac{1}{7}$ i la $\frac{1}{14}$ tal com férem amb el cercle, i la resta serà l'àrea.

2.6 La taula de cordes i arcs

2.6.1 Antecedents Com ja hem dit abans, Bar ̤iyya no introdueix cap angle que no sigui un angle recte. Una raó podria ser que, a diferència dels astrònoms, els agrimensors no disposaven d'estris adequats per mesurar angles i la seva obra anava dirigida a aquests darrers. En canvi, introdueix les cordes, que corresponen als angles centrals —és a dir, els costats dels polígons regulars.

Als matemàtics egipcis ja els havia preocupat la determinació del pendent d'un angle, l'*sqt*; de fet, és un concepte que s'apropa molt a la cotangent trigonomètrica ([48, §1.10.5, p. 109, i A.7, p. 298]). I els geòmetres astrònoms grecs havien confegit «taules de cordes». Ja les troben en l'obra perduda d'Hiparc i les consolida definitivament Claudi Ptolemeu a la *Sintaxi matemàtica*.¹⁴³

Els matemàtics àrabs, en canvi, van introduir el concepte *sinus* entès com a línia, i, indirectament, el nom.¹⁴⁴

139 Observem que $\frac{5}{8} \frac{\mathcal{L}}{2} = \frac{5}{16} \mathcal{L} = 0.3125 \mathcal{L}$. O bé, $\frac{5}{8} \frac{\mathcal{L}}{2} = \frac{5}{16} (3 + \frac{1}{7}) d = \frac{5 \times 22}{7 \times 16} d = \frac{110}{112} d = 0.982 d \sim d$.

140 Per §98, sabem que $d = \sqrt{S + \frac{3}{11} S}$ i, per §95, que $\mathcal{L} = (3 + \frac{1}{7}) d$, i això és el que cal fer.

141 Arquimedes diu que $S_{\text{el·lipse}}$ d'eixos a i b , amb $b < a = \frac{b}{a} S_{\text{cercle de radi } a} [= \pi a b]$.

142 $S_{\text{el·lipse}} = \pi a b$, on a i b són els semieixos, amb $b < a$ (§112, [5, p. 80-81]).

143 [54, p. 36-40]. Vegeu també [4, nota 111, p. 56].

144 Sembla que el terme *sinus* prové d'una mala traducció d'un text àrab ([16, edició castellana,

2.6.2 La taula de cordes de Bar Ḥiyya I Bar Ḥiyya recull aquest quant quan diu:

Els astrònoms s'aplicaren a aquest punt per raó de llur ciència i jo he traslladat aquí aquest càlcul, el que he cregut convenient. Exposo una taula dividida en 28 parts, puix que així he dividit el diàmetre, i en correspondència a això, la circumferència l'he dividida en 88 parts; en la dita taula hi ha quatre columnes; en la 1a columna van escrites les 28 parts i en les altres tres van els arcs corresponents a les cordes des d'1 a 28; en la 2a columna van les parts, en la 3a els minuts i en la 4a els segons,¹⁴⁵ com es veu a la taula 8.

Òbviament, com ja hem indicat abans (§95), si un cercle té un diàmetre més gran o més petit que el que hem dividit en 28 parts, les cordes que corresponen a les parts d'aquest nou diàmetre són proporcionals a l'inicial i, de retruc, les parts d'arcs es conserven.

Això fa que la taula de cordes sigui la mateixa amb independència del cercle sempre que es faci en referència a la mida de les parts del diàmetre corresponent.

Aleshores utilitza la potència d'un punt interior d'un cercle (§33) i el lligam de les parts iguals i desiguals d'un segment (§28)¹⁴⁶ per lligar la sageta amb la corda i el diàmetre. En concret, si d designa el diàmetre del cercle, c_α la corda i s_α la sageta de l'arc α , tenim:

$$s_\alpha = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c_\alpha}{2}\right)^2}.^{147}$$

I, de retruc,

$$c_\alpha = 2\sqrt{(d - s_\alpha) s_\alpha}. \quad (3)$$

2.6.3 Explicació de la taula de cordes de Bar Ḥiyya D'entrada recordem que el lligam que hi ha entre una corda d'un angle i el seu sinus és:

$$\frac{c}{2} := \text{corda } \alpha = r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Aleshores, atès que Bar Ḥiyya divideix el diàmetre d en 28 parts de mida $a = \frac{d}{28}$ i la circumferència en 88,¹⁴⁸ mitja circumferència en té 44.

p. 325-326)).

¹⁴⁵ És curiós observar que les parts fraccionàries de la corda les dona en el llenguatge sexagesimal mesopotàmic, de fraccions de seixanta i de seixanta de seixanta.

¹⁴⁶ Recordem el que diu: «Si dues cordes d'un cercle es tallen en un punt, dividint-les en dues parts, els rectangles que formen les part de l'un i l'altre són equivalents».

¹⁴⁷ Podia haver utilitzat el teorema de Pitàgores [§50, p. 125], que sembla més simple.

¹⁴⁸ Són les parts que pertocquen si atenem que la circumferència val $3 + \frac{1}{7}$ del diàmetre; és a dir, $28 \times 3 + 4 = 84 + 4 = 88$.

Ara considera cordes commensurables amb a , és a dir, les cordes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{14}, \dots, c_{24}, \dots, c_{28}$ de longituds $a, 2a, 3a, \dots, 14a, \dots, 24a, \dots, 28a = d$. A la figura 12 hi hem representat les cordes c_6 i c_{24} .

Divisions de la corda	Divisions de l'arc		
	Parts	Minuts	Segons
1	1		3
2	2		8
3	3		25
4	4		55
5	5	1	25
6	6	2	57
7	7	4	42
8	8	7	1
9	9	9	59
10	10	13	42
11	11	18	33
12	12	24	23
13	13	31	29
14	14	40	
15	15	50	10
16	17	2	16
17	18	16	16
18	19	33	29
19	20	53	29
20	22	17	10
21	22	45	19
22	25	19	4
23	27		1
24	28	50	36
25	30	54	52
26	33	20	55
27	36	29	29
28	44 ¹⁴⁹		

TAULA 8: Taula de cordes i d'arcs de Bar Ғiyya.

Aleshores, usant els triangles rectangles $\triangle OMA$ o $\triangle OM'A$, resulta que

$$\frac{1}{2}c_i = r \sin \frac{\alpha_i}{2}, \quad \text{per a } i = 6, 24.$$

¹⁴⁹ [5, p. 81-83].

§127. Tot el que fins ara hem explicat és referent a terrenys plans, la superfície dels quals és llisa; però de vegades es trobaran terrenys pendents del cim d'una muntanya, deprimits, còncaus o esfèrics, i els agrimensors s'equivocaran si els mesuren tal com si fossin plans.¹⁵²

Aleshores introdueix la tècnica de la canya i l'aplica a dos problemes: l'un quan el camp es troba en el vessant inclinat d'una muntanya ([5, p. 92]) i l'altre quan el camp es troba en un vessant corbat.

Acabem amb el darrer problema del capítol segon, que correspon a l'ítem §128 ([5, p. 93-94]), el qual, al nostre entendre, posa de manifest fins a quin punt el text s'allunya de la geometria aplicada i se'n va una mica més lluny. I, a més, ens permet copsar com funciona la tècnica de la canya.

§128. Si el terreny fos en la pendent d'un puig rodó i bombat, i volem saber l'àrea cabal, plantarem també la canya vertical i pel seu cap farem passar l'altra canya en angle recte, la qual prolonguem fins que toqui la muntanya i tindrem una figura semblant a l'anterior, sinó que DB és un arc, i el mateix serà tota AB , essent ambdós, arcs d'un mateix cercle i essent ambdós coneguts, car AB és la longitud del terreny, o bé l'amplada, i DB és l'arc que les dues canyes determinen.¹⁵³

Ara seguirem els passos de Bar Hiyya, detallant-los amb ítems que en facin la lectura més entenedora (figura 13):

1. Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle DCB$. Tenim que $DB^2 = DC^2 + BC^2$.
2. Calculem la sageta.
 - 2.1. La sageta divideix la corda i l'arc en dues parts iguals pels punts H i T .¹⁵⁴
 - 2.2. El triangle $\triangle HZB$ que s'obté prolongant la sageta és semblant al $\triangle DCB$.¹⁵⁵
 - 2.3. Els costats corresponents són proporcionals. O sigui, $\frac{DC}{CB} = \frac{ZH}{HB}$.¹⁵⁶

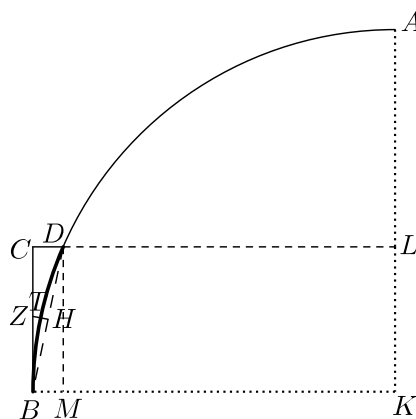


FIGURA 13

¹⁵² [5, p. 91-92].

¹⁵³ [5, p. 93].

¹⁵⁴ És la definició de sageta: «el segment perpendicular a la corda pel punt mitjà» i, per EIII 30 ([50, p. 223]), divideix l'arc en dues meitats.

¹⁵⁵ Ambdós són triangles rectangles i tenen un angle comú. Per tant, els tres angles són respectivament iguals [Ei 32 i Evi 4] ([50, p. 130 i 307]).

¹⁵⁶ Evi 4 [50, p. 304].

2.4. Per tant, $ZH = \frac{DC \times BH}{CB}$.¹⁵⁷

2.5. Per les mateixes raons, també tenim que $\frac{DC}{DB} = \frac{ZH}{ZB}$.

2.6. I, de retruc, $ZB = \frac{ZH \times DB}{DC}$.

2.7. Partint del punt Z amidem la longitud ZT .¹⁵⁸

3. Coneix la sageta i la corda i pot aplicar (3) per determinar el diàmetre.
4. Un cop conegut el diàmetre, pot determinar la corda de l'arc doble de AD que deduïm de la taula dels arcs i cordes.
5. La meitat d'aquesta corda és DL .
6. Si hi sumem el segment conegut DC , tindrem el segment CDL , que és igual al BMK , que és la mida del terreny.
7. Si l'altra dimensió no és corba, no caldrà refer el càlcul, però si ho és en les dues dimensions —es tracta d'un camp esfèric— caldrà repetir-lo ([5, p. 93–94]).

En aquest exemple, a diferència de l'anterior, no hi ha dades concretes. És una resolució totalment general i teòrica.

3 Conclusions

Hem vist amb força detall les influències que l'obra de Bar Ḥiyya va rebre dels matemàtics grecs i àrabs i com va influir en Fibonacci. Hem analitzat, en un cas concret, com usa expressions que ha establert per tangram per resoldre les equacions de segon grau. Hem vist també la importància que dona al cercle i a la circumferència i als lligams que hi ha entre ambdues figures geomètriques. Finalment, hem posat de manifest fins a quin punt l'obra pensada com un text de pràctica de càlcul concret conté parts importants de caire teòric.

Pensem que aquesta anàlisi, força minsa i alhora força completa, palesa la importància que el *Llibre de geometria* de Bar Ḥiyya té en el panorama matemàtic dels segles XI–XII i de quina manera un barceloní va aportar un granet de sorra al desenvolupament de l'àlgebra de segon grau una mica abans que ho fes Leonardo da Pisa.

Des de la nostra humilitat, voldríem acabar amb un reconeixement explícit, que ja sabem que no li cal en absolut, a Josep Millàs Vallicrosa per la seva contribució a la divulgació de la ciència àrab i jueva de la Catalunya dels segles X al XIII i, d'una manera particular, per haver-nos deixat l'edició en català d'aquesta petita joia que és el *Llibre de geometria* de Bar Ḥiyya, Savasorda.

¹⁵⁷ Aquí Bar Ḥiyya dona una expressió de caire algebraic, però podíem haver dit que ZH és el quart proporcional dels segments CB , DC i HB . O bé que s'obté per aplicació d'àrees sobre CB del rectangle $DC \times BH$. Vegeu Ev12, [50, p. 317 i p. 154–156].

¹⁵⁸ Coneixem la muntanya, l'altura BC de la canya i la llargada de la canya CD . Hem determinat BD i, de retruc, BH . I, per tant, ZH . I, en conseqüència, l'altura BZ , que determina el punt Z . L'únic amb el punt H , que és a l'interior de la muntanya, i obtenim el punt de tall T . La distància de ZT és la sageta. De fet, és fàcil determinar la direcció de la perpendicular ZH a BD .

4 Personatges esmentats

AL-BATTANÍ, Abu-Abd-Allah Muhàmmad ibn Jàbir ibn Sinan al-Harraní as-Sabí (Harran, [ara Turquia], ~858 - ?, 929), conegut simplement com a al-Battaní. Va començar a fer observacions astronòmiques a Raqqà l'any 877 i s'hi va dedicar tota la vida. Basant-se en l'*Almagest*, va fer observacions astronòmiques més precises que les de Ptolemeu, en un observatori privat que estava dotat dels més sofisticats instruments de l'època. També sabem que va fer observacions astronòmiques a Antioquia l'any 901.

AL-FARGHANÍ, Abul-l-Abbàs Àhmad ibn Muhàmmad ibn Kathir (Fergana, Sogdiana, [ara Uzbekistan], 805 - ?, 880), conegut com a al-Farghani i de manera llatinitzada com a Alfergani, va ser un dels astrònoms perses més cèlebres del segle IX.

AL-GHAFIQÍ AL-ANDALUSÍ, Abu-l-Qàssim Àhmad ibn Abd-Allah ibn Úmar (Còrdova, ? - Dènia, ~1035), més conegut pel sobrenom d'Ibn as-Saffar —literalment «el fill del calderer»—, científic andalusí del segle XI. Va construir el rellotge de sol més antic islàmic, que es conserva al Museu Arqueològic i Etnològic de Còrdova.

AL-HWĀRIZMĪ, Muḥammad ibn Mūsā (Bagdad [ara Iraq], ~780 - ?, ~850), matemàtic i astrònom. Va portar a Occident el sistema indoaràbic de numeració i l'àlgebra, i aquestes dues paraules són herència seva.

AL-MISRÍ, Abu-Jàfar Àhmad ibn Yússuf ibn Ibrahim ibn Tammam as-Siddiq al-Baghdadí (Bagdad [ara Iraq], 835 - el Caire [Egipte], 912), matemàtic àrab molt reputat que influí en matemàtics europeus posteriors.

ARQUIMEDES (Siracusa [Sicília], 288 - 212 aC), el més genial dels geòmetres grecs i un dels més notables de la història de la matemàtica.

BANU HUD, o HUDIDES, fou una dinastia local d'emirs que va governar els emirats de Làrida, de Saraqusta i en altres indrets de la frontera nord durant un segle, entre el 1039 i el 1139.

BOCACCIO, Giovanni (Florència, 1313 - Certaldo o Florència, 21 de desembre del 1375), escriptor i humanista del *Trecento*. Va escriure en llatí i en italià. És considerat, juntament amb Dant i Petrarca, un dels pares de la literatura italiana. La seva obra més coneguda és el *Decameró*.

BOMBELLI, Rafael (Bolonya, 1526 - Roma, 1572), matemàtic. Va introduir els nombres complexos per poder resoldre les equacions cúbiques irreductibles aplicant el mètode de Tartaglia quan les arrels són reals a l'*Àlgebra* (1572).

BONJORN, Bonet (Cotlliure, ~1300 - Barcelona, probablement abans de ~1360), astrònom i astròleg jueu català. Va ser l'autor d'unes taules astronòmiques preparades a Perpinyà el 1361, que encara avui es conserven manuscrites.

CARDANO, Gerolamo (Pavia, 24 de setembre del 1501 - Roma, 21 de setembre del 1576), metge, astròleg, matemàtic, jugador i filòsof. L'any 1545 va publicar un tractat d'àlgebra, *Ars Magna*, on donava la resolució de l'equació

- de tercer grau que li havia comunicat Tartaglia i la resolució de la quàrtica que havia resolt el seu deixeble Ludovico Ferrari.
- CHESTER, Robert (segle XII), traductor de l'àrab al llatí. Va traduir el text d'àlgebra d'al-Hwārizmī, *Hissab al'jabr wa-l-muqā-bala*.
- DANTE ALIGHIERI, en català anomenat *Dant* (Florència, maig/juny del 1265 - Ravenna, 14 de setembre del 1321), poeta del *Trecento*. És un dels autors més reconeguts de la literatura universal, per *La divina comèdia*, una de les obres fonamentals de la transició del pensament medieval al renaixentista i obra cabdal de la literatura universal.
- DEMÒCRIT D'ABDERA (Abdera [Tràcia], 460 aC - ?, 370 aC), filòsof i geòmetra i pare de l'*atomisme*. Va ser el primer a donar el volum de la piràmide i, alhora, a posar en relleu la paradoxa que suposava l'atomisme quan s'aplicava a aquest sòlid.
- DESARGUES, Girard (Lió, 21 de febrer del 1591 - 8 d'octubre del 1661), és el pare de la geometria projectiva.
- DESCARTES, René (Descartes [França], 31 de març del 1596 - Estocolm, 11 de febrer del 1650), important filòsof racionalista francès conegut també per les seves obres de matemàtiques i de diferents branques de la ciència. És considerat el pare de la filosofia moderna, ja que va ser el primer a proposar el problema de la validesa del coneixement com a primera qüestió filosòfica, i una de les figures clau de la revolució científica.
- EUCLIDES (Tir? [Fenícia], ~325 aC - Alexandria, ~265), matemàtic del segle III aC, autor dels *Elements*, una de les obres més importants de la literatura matemàtica. Fou també el geòmetra que fonamentà i desenvolupà l'estudi de la matemàtica al museu d'Alexandria.
- ÈUDOX DE CNIDOS (Cnidos [Grècia], 408 - 355 aC), geòmetra i astrònom, alumne de l'Acadèmia de Plató. Va introduir la teoria de la proporció de les magnituds incommensurables.
- FERMAT, Pierre de (Beaumont-de-Lomagne [França], 12 de gener del 1665 - Castres [França], 17 d'agost del 1601), jurista i matemàtic occità, sobresortí pels seus treballs matemàtics. Descobrí les propietats de diversos nombres i és considerat el creador de la teoria de nombres moderna. Amb René Descartes aplicà l'àlgebra a la geometria i, amb Blaise Pascal, fundà la teoria de la probabilitat. Usà el concepte de les variables infinitesimals en els problemes de quadratura, de càlcul de màxims i mínims i en la construcció de tangents. És conegut per l'últim teorema de Fermat, així com pel petit teorema de Fermat.
- FERRARI, Ludovico (Bolonya, 2 de febrer del 1522 - 5 d'octubre del 1565), matemàtic, deixeble de Cardano. Va trobar la resolució de la quàrtica reduint-la a la resolució d'una cúbica i una de segon grau.
- FONTANA, Niccolò, anomenat Tartaglia, 'el tartamut' (Brescia, 1499 - Venècia, 13 de desembre del 1557), matemàtic autodidacte. Trobant-se a Venècia va descobrir la manera de resoldre la cúbica del tipus $x^3 + px = q$.

- HERÓ D'ALEXANDRIA (? , ~10 - Alexandria, 70), inventor i matemàtic. Probablement l'enginyer més notable de la Grècia clàssica.
- HERÒDOT D'HALICARNÀS (Halicarnàs [Anatòlia], 484 - Turis [Magna Grècia], 425 aC), historiador i geògraf, considerat el primer historiador perquè pretenia basar els fets en la cronologia.
- HIPARC D'ALEXANDRIA (Nicea [Grècia], al voltant del ~190 - Alexandria, ~120 aC), astrònom, geògraf i matemàtic. És un dels astrònoms més importants de l'antiguitat, inventor de l'astrolabi i el primer que elaborà un catàleg d'estels.
- IBN EZRA, Abraham (Tudela [ara Navarra], 1089 - Calahorra [ara La Rioja], 23 de gener del 1167), erudit jueu, va cultivar la poesia, l'exegesi bíblica, la filosofia, la gramàtica hebrea i les ciències dels astres (astronomia, astrologia, matemàtiques i calendari). Fou una de les veus jueves més importants i una figura fonamental en la tasca de difusió de les cultures hebrea i àrab d'Al-Àndalus dins l'Espanya cristiana i Europa.
- IBN ISHAQ AL-IBADÍ, Abu-Zayd Hunayn (al-Hira [ara Iraq], 808 - Bagdad, 873), més conegut com a Hunayn ibn Ishaq, famós i influent savi assiri o àrab, metge i científic, conegut per les traduccions d'obres mèdiques i científiques del grec antic a l'àrab.
- KEPLER, Johannes (Weil der Stadt [ara Alemanya], 27 de desembre del 1571 - Ratisbona [ara Alemanya], 15 de novembre del 1630), astrònom i matemàtic alemany, és una figura clau de la revolució científica. És conegut, fonamentalment, pel descobriment de les lleis sobre el moviment dels planetes que va plasmar en les seves obres *Astronomia nova* (1609) i *Harmonices mundi* (1619).
- LEONARDO DA PISA (Pisa, 1175 - ~1250), un dels matemàtics amb més talent de l'edat mitjana, conegut com a Fibonacci. Va introduir el sistema de numeració indoaràbic i l'aplicació de l'àlgebra als problemes geomètrics a Europa a través de *Liber abaci* i *De practica geometriæ*. El seu nom ha quedat unit a la «successió de Fibonacci».
- LLULL, Ramon (Palma, 1232 - Tunis, 1316), escriptor, filòsof, místic, teòleg, professor i missioner mallorquí. És conegut per la seva extensa obra escrita, redactada en català, occità, llatí i àrab. És considerat el primer autor a fer servir una llengua vulgar per escriure obres científiques.¹⁵⁹
- MÜLLER VON KÖNIGSBERG, Johannes Müller (Königsberg in Bayern [ara Alemanya], 6 de juny del 1436 - Roma, 6 de juliol del 1476), prolífic astrònom i matemàtic alemany conegut amb el sobrenom de Regiomontanus, que prové de la traducció llatina del nom de la ciutat natal: Königsberg (Montanus Real o Montanus Regia). La seva obra es pot englobar en tractats de matemàtica, centrats en el que avui s'anomena *trigonometria*, de la qual es considera un dels pares fundadors, i tractats sobre astronomia.

¹⁵⁹ Millàs Vallicrosa va fer una edició crítica de *El libro de la «Nova geometria»* ([40]).

- PASCAL, Blaise (Clarmont d'Alvèrnia, 19 de juny del 1623 - París, 19 d'agost del 1662), filòsof, matemàtic, físic, inventor, escriptor, moralista, místic i teòleg occità. És, amb Fermat, el pare del càlcul de probabilitats, i, amb Desargues, de la geometria projectiva. És considerat una de les ments més brillants de la saviesa occidental.
- PETRARCA, Francesco (Arezzo [ara Itàlia], 20 de juliol del 1304 - Arquà Petrarca [ara Itàlia], 19 de juliol del 1374), important escriptor, poeta i humanista del *Trecento*. La seva obra més coneguda és el *Cançonier*.
- PLATÓ (? , ~21 de maig del 427 aC - Atenes, 347 aC), filòsof d'una gran influència a l'antiga Grècia. Va fundar l'Acadèmia i va escriure els famosos *Diàlegs socràtics*.
- PLATÓ DE TÍVOLI (llatí, *Plato Tiburtinus*) (Tívoli [ara Itàlia], 1110 - ?, 1145), traductor d'obres matemàtiques i astronòmiques del segle XII. L'única cosa que se sap de la seva vida és que va arribar a Barcelona l'any 1134 i s'hi va estar, com a mínim, fins al 1145. Tota la seva producció traductora data d'aquesta època, durant la qual va col·laborar amb el matemàtic i astrònom hebreu i del qual, l'any 1145, va traduir al llatí l'obra de geometria que ens ocupa, amb el títol *Liber embadorum*.
- PTOLEMEU, Claudi (Kla'udiws Ptolema'ikos) (Egipte, ~85 - Alexandria [Egipte], ~165), astrònom, geògraf i matemàtic grecoegipci, anomenat comunament Ptolemeu. Va escriure la *Sintaxi matemàtica* (>H Megal'h S'untaxis), coneguda amb el nom *Al-Magest*, l'obra gran' en àrab.
- RHIND, Alexander Henry (Wick [Escòcia], 26 de juliol del 1833 - Cadenabbia [Itàlia], 3 de juliol de 1863), advocat, historiador, geòleg i arqueòleg, especialitzat en egiptologia. Fou qui trobà el papir d'Ahmés. Fou pioner a desenvolupar un mètode científic per realitzar les seves investigacions i feia un dibuix de l'indret on havia trobat cada objecte i dels mateixos objectes.
- SANTCLIMENT, Francesc (? , segle XV), mestre d'aritmètica a Barcelona. El 1482 publicà *Summa de la art d'arismètica*, la primera obra catalana impresa d'aquest tipus que utilitzà xifres aràbigues.
- TEODOSI DE BITÍNIA (Jeòdosios) (Bitínia [ara Turquia], 180 - ?, ~100 aC), matemàtic i astrònom grec cèlebre per ser l'autor de *Les esfèriques* (Sfairik'a), un recull de tots els coneixements coneguts en aquell temps sobre la geometria de les esferes i, en definitiva, sobre la «geometria el·líptica», que no és euclidiana.
- TOMÀS D'AQUINO (Rocasecca [ara Itàlia], 1225 - Fossanova [ara Itàlia], 7 de març del 1274), teòleg i filòsof. Fou un dels teòlegs més importants de l'edat mitjana. Proporcionà les bases de la teologia cristiana en incorporar gran part del llenguatge i de les idees aristotèliques. La seva obra més notable és *Summa teològica* (~1274).
- VIÈTE, François (Fontenay-le-Comte [França], 1540 - París, 13 de desembre del 1603), matemàtic francès, potser el més rellevant del segle XV i conegut, de vegades, com el pare de l'àlgebra moderna.

Referències

- [1] AL-HWĀRIZMĪ, ABU JA'FAR MUḤAMMAD IBN MŪSĀ. *Hissab al'jabr wa-l-muqā-bala* (Llibre de la transposició i de la restauració). Segle IX. [Traducció llatina a [56]. *Algorismus dixit* (Deia algorismus). Traducció francesa a [3]]
- [2] ALLARD, A. «La diffusion en occident des premiers œuvres latines issues de l'arithmétique perdue d'al-Khwarizmi». *J. Hist. Arabic Sci.*, 9 (1-2) (1991), 101-105.
- [3] ALLARD, A. *Le calcul indien (algorismus)*. París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1992.
- [4] ARCHIBALD, R. C. *Euclid's' Book on Divisions of Figures*. Cambridge: Cambridge University Press, 1915. [En línia a <http://www.math.muni.cz/~sisma/deleni/archibaldeleni.pdf>]
- [5] BAR ḤIYYA, A. *Ḥibbur ha-měšihā wě-ha-tišboret* (Tractat de geometria i mesurament). 1116. [Traducció llatina de Plató de Tívoli, *Liber embadorum*, i catalana a [38]]
- [6] BAR ḤIYYA, A. *Měguil-lat ha-měgal-lé* (Llibre revelador). 1117. [Traducció alemanya a [53] i catalana a [37]]
- [7] BAR ḤIYYA, A. *Yěsodé ha-ěbunā wě-migdal ha-ěmunā* (Fonaments de la intel·ligència i torre de la creença). 1117. [Traducció catalana a [39]]
- [8] BAR ḤIYYA, A. *Ḥěsbón mahlekot ha-kokabim* (Càlcul dels moviments dels astres). 1136.
- [9] BAR ḤIYYA, A. *Šurat ha-areš wě-tabnit ha-šmavin* (Forma de la Terra i les figures del cel). 1136. [Sebastian Münster escrigué un extracte d'aquesta obra que publicà el 1546 amb una traducció llatina. Una traducció llatina completa es troba al Ms. 2079 de la Biblioteca Vaticana. L'obra completa a [46]. La traducció castellana a [41]]
- [10] BAR ḤIYYA, A. *Sefet Hegyón ha-néfeš* (Meditació de l'ànima). Leipzig: Eisek Freimann, 1860. [Amb una introducció de l'editor i una altra de S. J. Rapoport]
- [11] BAR ḤIYYA, A. «Epístola apologética a Mehuda b. Barsilai al-Barceloni sobre la base y límites de la Astrología». Ms. de Oxford. [Exemplars en Bodleiana Oppenheim Add. Oct. 5; Brit. Mus. Add. 27; 100; Florència, Medic. Plot. 88 cod. 3 = 28; Leiden, Warner 37; París, 1092; Vat. 379; Munic 36]]
- [12] BAR ḤIYYA, A. *Luḥot* (Taules astronòmiques). [Ms. Berlín 649 (Steinschneider. Catàleg número 102). Bodleina (Ori 443, 447; Neubauer 2070, 2071), així com Steinschneider Cal. de Munich, 1895, 161]
- [13] BAR ḤIYYA, A. *Sěfer ha-'ibbur* (Llibre de la intercalació del calendari). 1123. Edició de Filipowski. Londres: [s. n.], 1851.
- [14] BONCOMPAGNI, B. *Scritti Leonardo Pisano*. Vol. I. Roma: Tipographia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1857.
- [15] BONCOMPAGNI, B. *Scritti Leonardo Pisano*. Vol. II. Roma: Tipographia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1862.

- [16] BOYER, C. B. *A History of Mathematics*. Nova York: Wiley, 1972. [Traducció castellana de M. Martínez Pérez, *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza, 1992]
- [17] CAJORI, F. *A History of Mathematics*. MacMillan, 1894. [Reeditat per Chelsea, Nova York, 1985]
- [18] CHABÀS, J. «Interactions between Jewish and Christian Astronomers in The Iberian Peninsula». A: [27, p. 147–154].
- [19] CLAGETT, M. *Ancient Egyptian Science: A Source Book. Vol. 3: Ancient Egyptian Mathematics*. Filadèlfia: American Philosophical Society, 1999.
- [20] CURTZE, M. *Der «Liber embadorum» des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli. A: Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance*. Vol. 1, 1902. [En línia a https://wilbourhall.org/pdfs/collection/Curtze_M_1902_Urkunden_S.pdf]
- [21] DA PISA, L. *Liber abaci*, 1202. A: [14, vol. I, p. 1–283]; en anglès, [59].
- [22] DA PISA, L. *La practica geometriæ*, 1220. A: [14, vol. II, p. 1–224]; en anglès, [31].
- [23] DAUBEN, J. W. *The History of Mathematics from Antiquity to the Present: A Selective Bibliography*. Nova York: Garland, 1985.
- [24] DORCE, C. *Historia de las matemáticas en España*. Sant Cugat: Arpegio, 2017. 2 v.
- [25] ESCOBEDO, J. *Un incunable científic català: suma de la art de arismètica de Francesc Santcliment*. Barcelona: Biblioteca de Catalunya, 2007. 2 v.
- [26] FAVARO, A. «Notizie storica —critiche sulle divisione delle aree». *Memorie del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed arte*, 22 (1833), 125–154.
- [27] FREUDENTHAL, G. *Science in Medieval Jewish Cultures*. Nova York: Cambridge University Press, 2011.
- [28] GILLINGS, R. J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Cambridge, MA: MIT Press, 1972. [Reeditat per Dover Publications, Nova York, 1982]
- [29] GILLISPIE, C. C. (ED.). *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from the Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Charles Scribner's, 1991. 4 v.
- [30] GRATTAN-GUINNESS, I. *The Fontana History of the Mathematical Sciences*. Londres: Fontana Press, 1997.
- [31] HUGHES, B. (ED.). *Fibonacci's De Practica Geometrie*. Nova York: Springer, 2008.
- [32] KEPLER, J. *Stereometria Doliorum Vinariorum*. [Traducció francesa de J. Peyroux, *Nouvelle stéréométrie des tonneaux*. París: A. Blanchard, 1615]
- [33] LEVEY, M. «Abraham Bar H'iyya Ha-Nasi». A: [29, vol. I, p. 6–7].
- [34] LORIA, G. *Storia delle matematiche*. Milà: Ulrico Hoepli, 1991.
- [35] MALET, A. *L'aritmètica de Santcliment*. Vic: Eumo, 1998. [Introducció, transcripció i notes]

- [36] MASIÀ, R. *Sobre les conoides i les esferoides*. Barcelona: Bernat Metge, 2016.
- [37] MILLÀS VALLICROSA, J. M. *Llibre revelador (Meguillat HamegaHé)*. Barcelona: Editorial Alpha, 1929. [Traducció al català de Josep Maria Millàs i Vallicrosa. Pròleg i notes de Juli Guttmann]
- [38] MILLÀS VALLICROSA, J. M. *Llibre de geometria*. Barcelona: Editorial Alpha, 1931. [Prologat per Juli Guttmann]
- [39] MILLÀS VALLICROSA, J. M. *Obra enciclopèdica Yêsodé ha-têbuná u-migdal ha-êmuná de R. Abraham Bar Hiyya he-Bargeloní*. Madrid-Barcelona: Consejo Superior de Investigaciones Científicas; Instituto Arias Montano, 1952. [Edició crítica, amb traducció, pròleg i notes de J. Millàs Vallicrosa]
- [40] MILLÀS VALLICROSA, J. M. *El libro de la "Nova geometria"*. Barcelona: Asociación para la Historia de la Ciencia Española, 1953.
- [41] MILLÀS VALLICROSA, J. M. *La Forma de la Tierra*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas; Instituto Arias Montano, 1956.
- [42] MILLÀS VALLICROSA, J. M. *Estudios sobre historia de la ciencia española*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1987. 2 v.
- [43] MONJOS DE MONTSERRAT. *La Bíblia*. Andorra: Editorial Casal i Vall, 1969.
- [44] MUNSTER, S. *Spæra Mundi describens figuram terrae, dispositionem orbium cælstium, auctore Rabí Abraham hispano filio R. Haijac*. Basilea, 1546. [En línia a <https://books.google.cat>]
- [45] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. «Abraham Bar Hiyya Ha-Nasi». 1999. [En línia a: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abraham/>].
- [46] OFFENBACH, F. *Form of the Earth (Forma de la Terra)*. 1720. [Traducció castellana a [41]]
- [47] OFTERDINGER, L. *Beiträge zur Wiederherstellung der Schrift des Euclides über die Teilung der Figuren*. Ulm, 1853.
- [48] PLA CARRERA, J. *Història de la matemàtica. Egipte i Mesopotàmia: resultats, textos i contextos*. Barcelona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans, 2016.
- [49] PLA CARRERA, J. *Història de la matemàtica. Grècia I (de Tales i Pitàgores a Plató i Aristòtil): resultats, textos i contextos*. Barcelona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans, 2016.
- [50] PLA CARRERA, J. *Història de la matemàtica. Grècia IIa (Els Elements d'Euclides, llibres I, II, III, IV, V i VI): resultats, textos i contextos*. Barcelona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans, 2018.
- [51] PLA CARRERA, J. *Història de la matemàtica. Grècia IIb (Els Elements d'Euclides, llibres VII, VIII, IX, X, XI, XII i XIII): resultats, textos i contextos*. Barcelona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans, 2019.
- [52] PLA CARRERA, J. *Història de la matemàtica. Grècia IIIb: Dositeu, Conó, Arquímedes, Nicomedes i Esratòstenes.: resultats, textos i contextos*. Bar-

- celona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans, 2020. [Pendent de publicació]
- [53] POZNANSKI, A.; GUTTMAN, J. *Sefer Maquilat Ha-megaleh*. Berlín: Druck von H. Itzowski, 1924.
 - [54] PTOLEMEU, C. *Composition mathématique*. París: Chez H. Grand, 1813. [Traducció francesa de Halma i notes de M. Delambre. En línia a <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/ptolemee/table.htm>]
 - [55] ROMANO, D. *La ciencia hispanojudía*. Madrid: Mapfre, 1992.
 - [56] ROSEN, F. *The Algebra of Mohammed ben Musa*. Hildesheim: G. Olms, 1831. [Traducció i edició. Reimprès el 1986]
 - [57] SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. *Biografías de matemáticos árabes que florecieron en España*. Madrid: Estanislao Maestre, 1921.
 - [58] SANTCLIMENT, F. *La Suma de la art de Arismetica*. Barcelona: Pere Posa, 1482. [En línia a <https://books.google.cat>. Reeditat per [35] i [25, vol. II]]
 - [59] SIGLER, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci*. Nova York: Springer-Verlag, 2012.
 - [60] SMITH, D. E. *History of Mathematics*. Toronto: General Publishing Company, 1923. 2 v. [Reeditat per Dover, Nova York, 1958]
 - [61] STRUIK, D. J. *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Cambridge: Harvard University Press, 1969. [En línia a <https://archive.org/details/B-001-001-112/page/n88>]
 - [62] TATON, R. (COORD.). *Histoire générale des sciences*. París: Presses Universitaire de France, 1969. 4 v. [Traducció castellana de M. Sacristán. *Historia general de las ciencias*. Barcelona: Orbis, 1988]
 - [63] TOMELO LACRUÉ, M. *Biografía Científica de la Universidad de Zaragoza*. Saragossa: Facultad de Ciencias de Zaragoza, 1962.
 - [64] TÖYRYLÄ, H. *Abraham Bar Hiyya on Time, History, Exile an Redemption: An Analysis of Megillat ha-Megaller*. Leyden: Brill, 2014.
 - [65] WAERDEN, B. L. VAN DER *Science Awakening*. Groningen: P. Noordhoff, 1954. [Reeditat per Oxford University Press, Oxford, 1961, i per Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Països Baixos, 1975 i 1988]

Regularitat i singularitats en problemes de frontera lliure

XAVIER ROS-OTON I JOAQUIM SERRA

Resum: Els problemes de frontera lliure són equacions en derivades parcials en les quals hi ha també una interfície com a incògnita. L'exemple més clàssic és la transició de fase del gel desfent-se, conegut com el *problema de Stefan*. En aquest cas, la frontera lliure és la interfície sòlid-líquid entre el gel i l'aigua.

La qüestió matemàtica més important en aquest context és entendre la regularitat i les possibles singularitats de les fronteres lliures. L'objectiu d'aquest article és introduir aquesta àrea de recerca i presentar alguns resultats recents dels autors en col·laboració amb Alessio Figalli.

Paraules clau: problemes de frontera lliure, singularitats, problema de Stefan.

Classificació MSC2010: 35R35.

1 Introducció

Les equacions en derivades parcials (EDP) són un camp d'investigació molt actiu en matemàtiques, amb connexions molt importants en d'altres àrees com l'anàlisi harmònica, la geometria diferencial, el càlcul de variacions, la teoria de la probabilitat, la teoria geomètrica de la mesura, la mecànica de fluids o la matemàtica computacional i aplicada.

Una de les preguntes més bàsiques i centrals en l'estudi d'EDP és la regularitat: *Donada una determinada EDP (o una classe general d'EDP), són regulars totes les seves solucions, o poden tenir singularitats?*

La teoria de regularitat per a EDP es va desenvolupar enormement durant la segona meitat del segle xx, amb treballs de Caffarelli, Nirenberg, De Giorgi, Nash, Krylov, Evans, i molts d'altres; i és encara avui dia un dels temes centrals de recerca en EDP. A més, preguntes molt similars apareixen de forma natural

Aquest article és una traducció i adaptació de l'article dels mateixos autors que forma part d'un volum especial de la revista *Matematica, Cultura e Società*, publicada per la Unione Matematica Italiana; vegeu [51].

en contextos purament geomètrics, i aquestes idees van tenir fins i tot un paper clau en la demostració de Perelman de la conjectura de Poincaré [61].

En aquest article estudiarem la regularitat per a *problemes de frontera lliure*. Per una banda, aquest tipus de problemes modelen molts fenòmens naturals en física, biologia, ecologia, economia i matemàtica financera. Per altra banda, la seva teoria matemàtica té una vessant molt geomètrica, i està íntimament lligada amb l'estudi de les superfícies mínimes i d'alguns fluxos geomètrics.

A continuació presentem els problemes que estudiarem, així com algunes motivacions i exemples. Després passarem a descriure la teoria matemàtica clàssica sobre la regularitat de les fronteres lliures, i finalment presentarem alguns resultats recents dels autors en col·laboració amb Alessio Figalli sobre l'estudi de les singularitats en aquests problemes.

1.1 El problema de Stefan

El problema de Stefan, introduït durant el segle XIX, és el problema de frontera lliure més clàssic i important. Va ser considerat per primera vegada per Lamé i Clapeyron el 1831, i descriu la distribució de la temperatura en un medi homogeni durant una transició de fase, per exemple, un bloc de gel submergit en aigua. El nom prové del físic eslovè Jožef Stefan, que va introduir una classe general de problemes d'aquest tipus al voltant del 1890 [59, 60, 43].

La formulació més clàssica del problema de Stefan és la següent: sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domini fitat. Podem pensar que Ω és, per exemple, un tanc cilíndric d'aigua, com en la figura 1. Denotem per

$$\theta = \theta(x, t)$$

la temperatura de l'aigua al punt $x \in \Omega$ a temps $t \in \mathbb{R}^+ := [0, \infty)$. Suposem que $\theta \geq 0$ en $\Omega \times \mathbb{R}^+$. La temperatura inicial i la temperatura a la vora del tanc són donades.

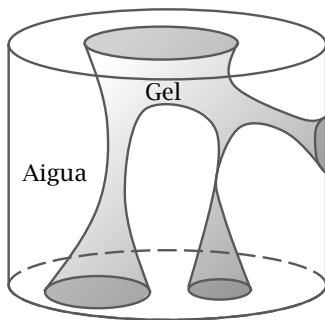


FIGURA 1: El problema de Stefan.

El conjunt $\{(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ : \theta(x, t) > 0\}$, que denotarem per $\{\theta > 0\}$, representa l'aigua líquida, mentre que el seu complementari, que denotem per $\{\theta = 0\}$, representa el gel. La temperatura θ és solució de l'equació de la calor

$$\partial_t \theta - \Delta \theta = 0 \quad \text{a la regió } \{\theta > 0\},$$

mentre que en el complementari θ és simplement zero.

Determinar on és la interfície o *frontera lliure* que separa les dues regions (és a dir, la superfície $\partial\{\theta > 0\}$) forma part del problema, i per això necessitem una equació (o una condició de frontera) addicional sobre aquesta interfície, que s'anomena *condició de Stefan*:

$$\partial_t \theta = |\nabla \theta|^2 \quad \text{a } \partial\{\theta > 0\}. \quad (1)$$

Aquesta relació addicional ve de dues consideracions. Primer, la velocitat de la interfície en la direcció normal, V , és proporcional a la quantitat de calor absorbida (que es fa servir per desfer el gel). A més, aquesta calor que «entra» és, per la llei de Fourier, proporcional al gradient de la temperatura. Per tant, tindrem que $V = C|\nabla \theta|$ per a alguna constant C . Segon, com que $\theta = 0$ a la interfície, obtenim que, sobre aquesta, V i $\nabla \theta$ són paral·lels i $(\partial_t + V \cdot \nabla)\theta = 0$. Combinant les dues informacions prèvies i escollint les unitats físiques de manera que $C = 1$, obtenim la condició de Stefan (1).

També es pot veure que, pel principi del màxim, el gel $\{\theta = 0\}$ es va fent petit a mesura que avança el temps. En altres paraules, si en algun punt de Ω hi ha aigua líquida en un instant de temps determinat, aleshores aquest punt seguirà essent líquid per a tots els temps futurs.

Es pot demostrar que, després de la transformació

$$u(x, t) := \int_0^t \theta(x, \tau) d\tau$$

(vegeu [3, 20]), la nova funció

$$u: \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

compleix

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= -\chi_{\{u>0\}}, \\ u &\geq 0, \\ \partial_t u &\geq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

on χ_A denota la funció característica del conjunt A .

Com que podem recuperar θ a partir de u simplement derivant respecte de t , veiem que (2) és una formulació equivalent del problema de Stefan. La nova formulació és útil perquè té millors propietats matemàtiques (té l'estructura d'una «desigualtat variacional») que la formulació original amb θ . Per exemple, mentre que en la formulació original amb θ no és clar com demostrar existència

i unicitat de solució (no n'hi havia cap demostració rigorosa durant més d'un segle!), és molt més fàcil de fer-ho amb la formulació equivalent (2).

La versió estacionària de (2) és el *problema de l'obstacle*:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \chi_{\{u>0\}}, \\ u &\geq 0.\end{aligned}\tag{3}$$

És un dels problemes més coneguts en EDP el·líptiques, ja que sorgeix de manera natural en molts contextos diferents.

1.2 Motivacions i aplicacions

Tots dos problemes, el de Stefan i el de l'obstacle, apareixen en molts models diferents en física, indústria, biologia i finances. A continuació comentem breument alguns d'aquests models, i referim el lector als llibres [21, 40, 49, 33, 48, 25] per a més detalls i altres aplicacions d'aquest tipus de problemes.

- **Transicions de fase.** En el problema de Stefan clàssic, tal com hem explicat a la subsecció prèvia, la solució u de (2) és la integral de la temperatura d'un sòlid sota una transició de fase, com per exemple gel que es desfà en aigua.

- **Filtració de fluids.** El *problema de la presa* descriu la filtració d'aigua dins una presa feta d'un material porós. Es considera una presa porosa que separa dues reserves d'aigua a diferents altures; vegeu la figura 2. Aleshores, l'interior de la presa té una part molla, on l'aigua flueix, i una part seca. En aquest context, la integral de la pressió és solució del problema de l'obstacle (3), i la frontera lliure correspon a la interfície entre la part molla i la part seca de la presa.

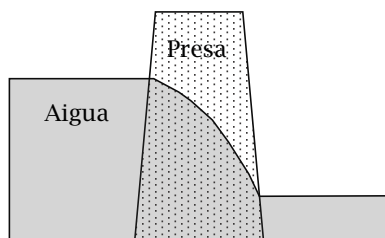


FIGURA 2: El problema de la presa.

- **Flux de Hele-Shaw.** Aquest model, introduït l'any 1898, descriu un flux d'un fluid entre dues plaques paral·leles separades per un espai molt prim. Diversos problemes en mecànica de fluids es poden aproximar per fluxos de Hele-Shaw, i aquest és el motiu pel qual entendre aquest model és important.

Una cèl·lula de Hele-Shaw (vegeu la figura 3) és un dispositiu experimental en el qual un fluid viscos és atrapat en l'espai entre dues plaques paral·leles molt juntes entre si. En algunes regions, l'espai entre les plaques conté fluid mentre que en d'altres l'espai conté aire. Quan injectem líquid dins el dispositiu (per exemple, a través d'un petit forat a la placa superior) la regió que conté fluid creix. En aquest context, la integral de la pressió resol, per a cada $t > 0$ fixat, el problema de l'obstacle (3). Igual que en el problema de la presa, la frontera lliure correspon a la interfície entre la regió amb fluid i la regió amb aire.

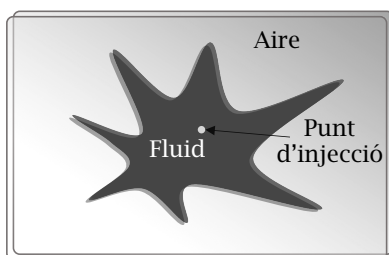


FIGURA 3: Una cèl·lula de Hele-Shaw.

• **Estratègies òptimes, finances.** En la teoria de la probabilitat i en finances, el problema de Stefan (2) i el problema de l'obstacle (3) apareixen quan considerem alguns problemes d'optimització per a processos estocàstics.

Un exemple típic és el model de Black-Scholes per al preu de les opcions americanes. Una opció americana és un contracte que dona el dret (a la persona propietària de l'opció) a comprar algun actiu financer (típicament accions d'una certa empresa) a un preu especificat (preu d'exercici) en qualsevol moment abans de la data de venciment. Aquesta opció té un valor, ja que, en cas que el preu de mercat pugi per sobre del preu d'exercici, aleshores l'opció es pot exercir i comprar així l'actiu a un preu més barat.

L'objectiu del model de Black-Scholes és calcular el preu racional $u = u(x, t)$ d'una opció en un temps t (previ a la data de venciment) i depenent del preu $x \in \mathbb{R}^+$ de l'actiu financer. Com que l'opció es pot exercir en qualsevol moment abans del venciment, determinar la «regió d'exercici», *i. e.* els parells (x, t) pels quals l'estratègia òptima és exercir l'opció, forma part del problema. Potser, sorprenentment, aquest model probabilístic ens porta una altra vegada a un problema de Stefan del tipus (2), i la frontera lliure correspon a la vora de la regió d'exercici.

• **Sistemes de partícules en interacció.** Els sistemes amb un gran nombre de partícules en interacció apareixen en física, biologia o ciència de materials.

En alguns d'aquests models les partícules s'atrauen entre elles quan són lluny, però es repelleixen quan són a prop [16]. En altres models de mecànica estadística, les partícules (per exemple, electrons) es repelleixen amb una força de Coulomb i es vol entendre el seu comportament sota la presència d'un camp extern que les manté atrapades [55].

En els models anteriors, una qüestió natural i interessant és determinar les configuracions d'equilibri. Per exemple, en sistemes de Coulomb els electrons s'acumulen en una regió que té una vora ben definida; vegeu la figura 4. Remarcablement, aquests problemes són també equivalents a problemes de l'obstacle del tipus (3) —el potencial elèctric $u = u(x)$ generat pels electrons resol un problema com (3) i la frontera lliure correspon a la vora de la regió en què les partícules es concentren.

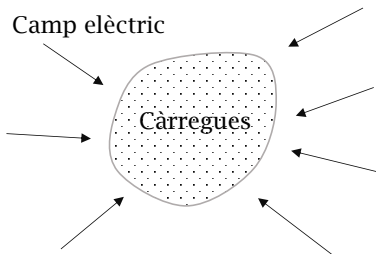


FIGURA 4: La configuració d'equilibri per un sistema de Coulomb.

- **Elasticitat.** Considerem ara la posició d'equilibri $v(x)$ d'una membrana elàstica amb la vora fixada, i que es manté per sobre d'un obstacle fixat $\varphi(x)$.

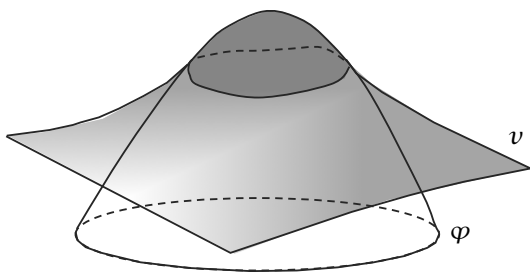


FIGURA 5: Una membrana elàstica sobre un obstacle φ .

A la regió on la membrana rau sobre l'obstacle φ , la solució v resol una EDP (i. e., $\Delta v = 0$ en $\{v > \varphi\}$), mentre que en l'altra regió la membrana simplement coincideix amb l'obstacle (i. e., $v = \varphi$). Considerant la funció $u := v - \varphi \geq 0$, trobem un problema de l'obstacle del tipus (3).

2 Regularitat de les fronteres lliures

Des del punt de vista matemàtic, una pregunta central en el problema de Stefan (2) i en el problema de l'obstacle (3) és entendre la *regularitat de les fronteres lliures* [14, 48].

Per exemple, en el problema de Stefan: hi ha alguna propietat de regularització que fa que la frontera lliure sigui regular, independentment de la condició inicial? (Notem que a priori la frontera lliure podria ser un conjunt molt irregular, fins i tot un conjunt fractal!) Aquest tipus de preguntes són en general molt difícils, i fins i tot en casos més senzills no se sabia res abans del 1970. El desenvolupament de la teoria de regularitat per a fronteres lliures va començar a finals dels anys setanta, i des d'aleshores ha estat un camp de recerca molt actiu.

2.1 Alguns exemples de Schaeffer

La primera cosa a intentar és construir algunes solucions explícites del problema de l'obstacle, i veure com es comporten les seves fronteres lliures. Quan fem això ens trobem que, en la majoria de casos senzills, les fronteres lliures són molt regulars.

Va ser Schaeffer qui s'adonà que, amb una mica més d'esforç, es poden construir diversos exemples amb fronteres lliures amb singularitats. En concret, va trobar diferents solucions del problema de l'obstacle a $\mathbb{R}^2$ en les quals la frontera lliure té una cúspide.

De fet, aquests exemples es poden construir fent servir eines d'anàlisi complexa, i les cúspides venen donades per les corbes

$$x_2 = \pm x_1^{2k+\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq x_1 \leq 1.$$

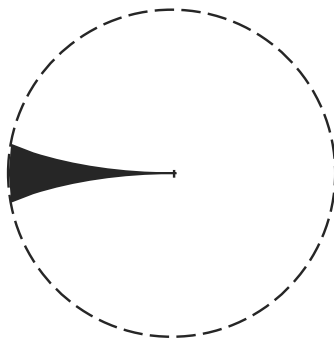


FIGURA 6: Una cúspide.

El conjunt $\{u > 0\}$ és la imatge de $\{|z| \leq 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ després de la transformació conforme $f(z) = z^2 + i z^{4k+1}$, i u prop de l'origen compleix

$$u(z) \approx \frac{x_2^2}{2} + c_k \operatorname{Im}(z^{2k+\frac{3}{2}}) + \dots,$$

on $z = x_1 + ix_2$.

Un altre tipus de singularitats (una cúspide doble) també va ser construïda per Schaeffer. En aquest cas, les cúspides dobles venen donades per les corbes

$$x_2 = \pm |x_1|^{2k}, \quad -1 \leq x_1 \leq 1.$$

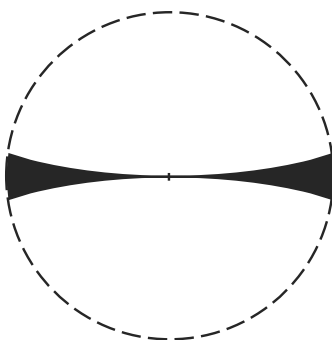


FIGURA 7: Una cúspide doble.

Considerant problemes de l'obstacle del tipus (3) lleugerament més generals a $\mathbb{R}^2$, Schaeffer va demostrar que és possible construir fins i tot exemples en què la frontera lliure té infinites cúspides.



FIGURA 8: La frontera lliure podria tenir un nombre infinit de cúspides.

2.2 El teorema de Caffarelli

Malgrat tenir tots aquests exemples, fins a finals dels anys setanta no hi havia cap resultat general de regularitat per a fronteres lliures. Una conjectura natural, donats aquests exemples, seria que les fronteres lliures són regulars fora d'un cert conjunt de «punts singulars». Tot i així, no hi havia cap resultat d'aquest tipus, i semblava un problema obert extremament difícil.

Això va canviar l'any 1977 amb l'article de Luis Caffarelli [7]. Aquest treball va desenvolupar per primera vegada una teoria de regularitat de les fronteres lliures en el problema de l'obstacle (3) i el problema de Stefan (2).

Els principals resultats de [7] (vegeu també [39]) es podrien resumir així:

- La frontera lliure es pot dividir entre *punts regulars* i *punts singulars*.
- El conjunt de *punts regulars* és un subconjunt obert de la frontera lliure, i és C^∞ .

- Els punts singulars x_0 es poden caracteritzar com aquells on el «conjunt de contacte» $\{u = 0\}$ té densitat zero (com en una cúspide), *i. e.*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\{u = 0\} \cap B_r(x_0)|}{|B_r(x_0)|} = 0. \quad (4)$$

En altres paraules:

La frontera lliure és regular, excepte en un cert conjunt de singularitats de tipus cúspide.

Aquest és un dels resultats pels quals Caffarelli va rebre el Premi Wolf l'any 2012 i el Premi Shaw l'any 2018.

2.3 Els esclataments o *blow-ups*

Per a demostrar aquest resultat de regularitat, es consideren el que anomenem *esclataments* (en anglès, *blow-ups*). Aquesta és una idea clau que és comuna en molts problemes d'EDP i d'anàlisi geomètrica.

Donat un punt x_0 de la frontera lliure, es consideren les funcions reescalades

$$u_r(x) := \frac{u(x_0 + rx)}{r^2}, \quad (5)$$

per a $r \in (0, 1)$. Noteu que, en agafar $r > 0$ més i més petit, estem ampliant la solució¹ (fent zoom) al voltant del punt x_0 .

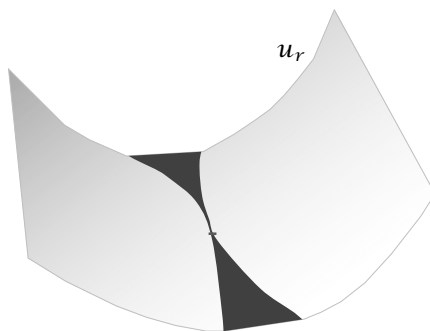


FIGURA 9: La funció reescalada u_r en un punt singular.

Aleshores, la idea és prendre el límit $r \downarrow 0$, i demostrar que

$$u_r(x) := \frac{u(x_0 + rx)}{r^2} \xrightarrow{r \downarrow 0} u_0(x)$$

¹ Es pot demostrar que, per a qualsevol punt de la frontera lliure x_0 , es té $\max_{B_r(x_0)} u \approx r^2$, per a $r > 0$ petit. Per tant, el factor de reescalament $1/r^2$ a (5) és escollit simplement per tal que les funcions u_r compleixin $\max_{B_1} u_r \approx 1$.

per a una certa funció u_0 que és una solució *global* del problema de l'obstacle en tot l'espai. Aquesta funció u_0 és el que anomenem un *esclatament de u en x_0* .

Bàsicament, la idea és que la funció u_0 ens hauria de donar informació sobre quin aspecte té la solució u en el punt x_0 .

Una de les principals dificultats és, de fet, *classificar els possibles esclataments*. Pel problema de l'obstacle, Caffarelli va demostrar que, o bé

- (a) u_0 és una solució unidimensional de la forma

$$u_0(x) = ((x \cdot e)_+)^2,$$

on $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ és algun vector unitari;

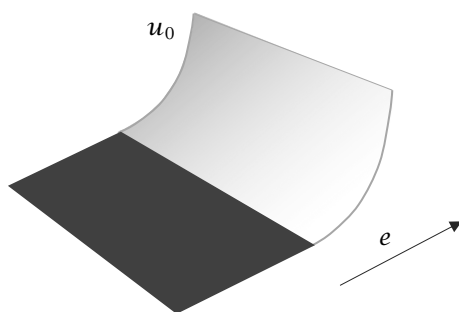


FIGURA 10: Una solució 1D u_0 .

o bé

- (b) u_0 és un polinomi quadràtic de la forma

$$u_0(x) = \frac{1}{2}x^T A x,$$

on $A \geq 0$ és una matriu simètrica, semidefinida positiva, i tal que $\text{tr}(A) = 1$.

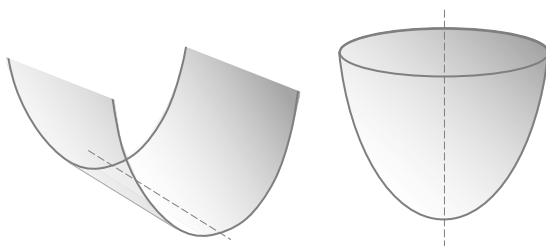


FIGURA 11: Possibles polinomis quadràtics u_0 del tipus (b).

Notem que, en el cas (a), el conjunt de contacte $\{u_0 = 0\}$ és un semiespai, mentre que, en el cas (b), el conjunt $\{u_0 = 0\}$ té mesura zero. El primer cas és el que esperem als punts regulars, mentre que el segon cas és el que esperem als punts singulars.² Aquesta intuïció no només és correcta sinó que, de fet, es tradueix en una definició matemàtica rigorosa: diem que un punt de la frontera lliure x_0 és *regular* si l'esclatament u_0 en x_0 és del tipus (a), i diem que x_0 és un punt *singular* si l'esclatament u_0 en x_0 és del tipus (b).

Per completar la demostració del teorema de Caffarelli, s'ha de *transferir la informació* de u_0 a la solució u , i demostrar que, si x_0 era un punt regular, aleshores la frontera lliure és C^1 en un entorn de x_0 . Aquesta part també és delicada, i és una altra de les principals contribucions de [7]. D'altra banda, el fet que $\{u = 0\}$ compleixi (4) en els punts singulars és una conseqüència més immediata de la definició de punt singular, fent servir que la convergència de u_r a u_0 és uniforme i que $u_0 > 0$ fora d'un subespai lineal de $\mathbb{R}^n$. Per a més detalls, el lector pot consultar [8, 9] o bé [48, 25].

3 Singularitats

Després dels resultats de Caffarelli [7], el pas següent és entendre millor el conjunt de punts singulars.

Entendre l'estructura de les singularitats és un tema de recerca central en diverses àrees relacionades amb EDP no lineals i anàlisi geomètrica. En el nostre context, és ben natural preguntar-se:

- Com de «gran» pot ser el conjunt singular?
- En cas que sigui un conjunt gran, es podria demostrar que té bones propietats estructurals o de regularitat?

3.1 El cas 2D

Els primers resultats en aquesta direcció van ser demostrats per L. Caffarelli i N. Rivière en dues dimensions [12]. Van provar que, en qualsevol punt singular x_0 , qualsevol solució u del problema de l'obstacle en $\mathbb{R}^2$ compleix

$$u(x) = p_2(x) + o(|x - x_0|^2), \quad (6)$$

on p_2 és un polinomi quadràtic $p_2 \geq 0$ i $\Delta p_2 = 1$. A més, això implica que el conjunt singular està contingut en una corba de classe C^1 .

Van passar molts anys abans que aquest resultat es pogués millorar. El següent resultat important en aquesta direcció va ser el de Sakai el 1991 [52, 53], qui va demostrar que les cúspides de Schaeffer (descrites abans a la subsecció 2.1) són bàsicament les úniques que poden aparèixer en el problema de l'obstacle (3) en $\mathbb{R}^2$. Aquest resultat elegant i òptim dona una imatge completa del problema de l'obstacle en el pla, i la seva demostració fa servir de forma crucial eines d'anàlisi complexa.

² Per exemple, si fem l'esclatament a la solució de la figura 9, en el límit $r \rightarrow 0$ hauríem d'obtenir un polinomi com el primer de la figura 11.

3.2 Dimensions més altes

En dimensions $n \geq 3$, on l'anàlisi complexa no ens pot ajudar, els primers resultats per al conjunt singular van ser obtinguts per Caffarelli l'any 1998 [9] (vegeu també [46]). Va demostrar que, si u és qualsevol solució del problema de l'obstacle (3) a $\mathbb{R}^n$, aleshores (6) es compleix en tot punt singular x_0 . A més, això implica que el conjunt singular està contingut en una varietat C^1 de dimensió $(n - 1)$.

Durant gairebé dues dècades, aquest era el millor resultat conegut per al conjunt singular en dimensions $n \geq 3$. Tot i així, una qüestió oberta important era entendre si (6) es podia millorar o no.

En dimensió dos, gràcies als resultats de Sakai, en tot punt singular de la frontera lliure tenim

$$u(x) = p_2(x) + O(|x - x_0|^3). \quad (7)$$

És important remarcar, però, que els mètodes de Sakai, basats en anàlisi complexa, no poden funcionar en dimensions més altes, ni tampoc per al problema de Stefan. Per tant, millorar (6) en dimensions $n \geq 3$ requeriria idees completament diferents.

El primer resultat nou en aquesta direcció per a dimensions $n \geq 3$ va ser establert per Colombo, Spolaor i Velichkov el 2017 [17], ja que van millorar i refinar els mètodes de Weiss [62]. Van demostrar que en tot punt singular l'expansió (6) és certa amb un mòdul de continuïtat logarítmic addicional en el terme $o(|x - x_0|^2)$.

De forma independent i amb mètodes diferents, Figalli i el segon autor van demostrar a [30] el resultat següent per al problema de l'obstacle a $\mathbb{R}^n$:

TEOREMA 1 ([30]). *Fora d'un conjunt de dimensió de Hausdorff $n - 3$, se satisfà (7).*

En altres paraules, en dimensions més altes, (7) és cert a *gairebé tots* els punts singulars x_0 .

L'expansió (7) de u , de fet, dona una informació millorada per a la cúspide en x_0 . Concretament, se segueix dels resultats de [30] que, en gairebé tots els punts singulars x_0 (possiblement després d'una rotació), en un entorn de x_0 tenim

$$\{u = 0\} \subseteq \{|x_n| \leq C|x'|^2\},$$

on $x = (x', x_n)$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

A més, també es va demostrar a [30] que aquest resultat és òptim, en el sentit que existeixen punts singulars (aïllats) a $\mathbb{R}^3$ en els quals (7) no és cert. De fet, en aquests punts, el mòdul de continuïtat logarítmic de [17] no es pot millorar.

Tot plegat dona una imatge molt completa de les singularitats per al problema de l'obstacle en qualsevol dimensió.

3.3 El problema de Stefan

Tal com hem explicat, una de les preguntes més importants en problemes d'EDP en què apareixen singularitats és establir estimacions per a la *mida* del conjunt singular.

Alguns resultats famosos en aquesta direcció inclouen teoremes sobre superfícies mínimes [57, 2], les equacions de Navier-Stokes [11], i el flux de curvatura mitjana [64].

En el problema de Stefan (2), les mateixes tècniques usades en l'estudi del problema de l'obstacle impliquen que per al problema (2), per a cada t fixat, el conjunt singular té dimensió $(n - 1)$; vegeu [63, 6, 44]. Aquest resultat és òptim en espai, en el sentit que es poden construir exemples en els quals el conjunt singular conté una hipersuperfície de dimensió $(n - 1)$ (per exemple, una esfera) per a algun temps fixat $t = t_0$. En aquest sentit, semblaria que el conjunt de punts singulars pot ser tan gran com el de punts regulars, que sempre és $(n - 1)$ -dimensional. Ara bé, encara es podria tenir l'esperança que, mirant conjuntament l'espai i el temps, el conjunt singular pogués ser molt més petit que el conjunt regular.

Per exemple, no es coneixen casos en els quals apareguin punts singulars per a tot temps t , però no és (o era) clar *a priori* si això podria passar o no. En cas negatiu, la següent qüestió seria establir estimacions per al conjunt de *temps singulars*. Concretament, si denotem Σ_t el conjunt dels punts singulars a temps t , aleshores podem definir com a

$$S = \{t : \Sigma_t \neq \emptyset\}$$

el conjunt de tots els temps per als quals existeix alguna singularitat.

El resultat següent va ser anunciat a la xerrada plenària d'Alessio Figalli a l'ICM2018 [27], i apareixerà demostrat a l'article [29]:

TEOREMA 2 ([29]). *Segui $u(x, t)$ una solució del problema de Stefan (2) a $\mathbb{R}^3$. Suposem que*

$$u_t > 0 \quad \text{a} \quad \{u > 0\}.$$

Aleshores,

$$\dim_{\mathcal{H}}(S) \leq \frac{1}{2}.$$

En particular, la frontera lliure és C^∞ gairebé per a tot temps t .

Aquí, $\dim_{\mathcal{H}}(S)$ denota la dimensió de Hausdorff³ del conjunt S .

Aquest és el primer resultat sobre la mida del conjunt de temps singulars per al problema de Stefan. El teorema l'hem enunciat per simplicitat en la dimensió física $n = 3$, però a [29], de fet, demostrem nous resultats per al problema de Stefan a $\mathbb{R}^n$ per a tota dimensió $n \geq 2$. Com hem dit abans,

³ La dimensió de Hausdorff es defineix per a qualsevol conjunt mesurable i, en cert sentit, ens dona una idea de la «mida» del conjunt.

prèviament no se sabia ni tan sols si les solucions al problema de Stefan (2) a $\mathbb{R}^3$ podrien tenir singularitats per a *tot* temps t .

Finalment, volem remarcar que no és clar si la dimensió $\frac{1}{2}$ és òptima o no. El que sí és clar de les demostracions és que aquest és un exponent *crític* per a aquest problema. Això és similar (tot i que els resultats i demostracions són molt diferents) al que passa per a les equacions de Navier-Stokes; vegeu el resultat clàssic de Caffarelli, Kohn i Nirenberg [11].

4 Regularitat genèrica

Una segona qüestió molt important en l'estudi de singularitats és el desenvolupament de mètodes per demostrar resultats de *regularitat genèrica*.⁴ Aquest és un dels grans reptes per a la teoria d'EDP avui en dia.

En efecte, en problemes d'EDP en els quals poden aparèixer singularitats, és important entendre si aquestes singularitats apareixen «sovint», o si en canvi «la majoria» de solucions no tenen singularitats.

En el context del problema de l'obstacle (3), la pregunta clau és entendre la regularitat genèrica de les fronteres lliures. Com hem vist abans, exemples explícits mostren que els punts singulars en el problema de l'obstacle poden formar un conjunt molt gran, de dimensió $n - 1$ (tan gran com el conjunt regular). Tot i així, s'espera que els punts singulars siguin «rars» ([54]):

CONJECTURA (SCHAEFFER, 1974). *Genèricament, les fronteres lliures en el problema de l'obstacle són C^∞ , sense punts singulars.*

Fixem-nos que, en particular, la conjectura diu que, genèricament, la frontera lliure no hauria de tenir singularitats.

La conjectura només havia estat demostrada en el pla $\mathbb{R}^2$ [46], i fins fa poc no se sabia res a $\mathbb{R}^3$ o en dimensions més altes. Noteu que en el problema de l'obstacle la qüestió de regularitat genèrica és particularment rellevant, ja que el conjunt singular, en principi, podria ser tan gran com el conjunt regular —mentre que en altres problemes el conjunt singular és de dimensió més petita [37]. A més, des del punt de vista de les motivacions i aplicacions, és particularment rellevant entendre el problema en l'espai físic $\mathbb{R}^3$.

El resultat següent va ser demostrat recentment per Figalli i els autors a [28]:

TEOREMA 3 ([28]). *Genèricament, a $\mathbb{R}^n$ el conjunt de punts singulars Σ té dimensió de Hausdorff menor o igual que $n - 4$, i*

$$\mathcal{H}^{n-4}(\Sigma) = 0.$$

En particular, la conjectura de Schaeffer és certa a $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$.

⁴ Aquí, per regularitat genèrica ens referim al fet que existeixi un conjunt obert i dens de condicions de vora per a les quals la solució corresponent no té singularitats.

Aquí, $\mathcal{H}^{n-4}$ denota la mesura de Hausdorff de dimensió $n - 4$. És una generalització de l'àrea o el volum, vàlida per a conjunts que *a priori* poden ser molt irregulars.

És important remarcar que hi ha molt pocs resultats coneguts en aquesta direcció en EDP el·líptiques, i la majoria tracten només els casos en què el conjunt singular és molt petit (per exemple, el problema de l'obstacle a $\mathbb{R}^2$ [46], o les hipersuperfícies que minimitzen l'àrea a $\mathbb{R}^8$ [58]).

Donat el caràcter general de les demostracions de [28], es poden aplicar aquests resultats fins i tot al *flux de Hele-Shaw* (introduït abans).

COROLLARI 4 ([28]). *Segui $u(x, t)$ una solució del flux de Hele-Shaw a $\mathbb{R}^2$.*

Aleshores, la frontera lliure és C^∞ gairebé per a tot temps t .

Cal recordar que, en aquest model, el cas 2D és el més important; és per això que enunciem el teorema a $\mathbb{R}^2$. A més, igual que en el problema de Stefan, a l'article [28] s'estableix una nova cota sobre la mida del conjunt singular: per al flux de Hele-Shaw en $\mathbb{R}^2$, el conjunt de temps singulars té dimensió de Hausdorff com a màxim $\frac{1}{4}$.

5 El problema de l'obstacle fraccionari

5.1 Estratègies òptimes i finances

Tal com s'ha explicat a la subsecció 1.2, una motivació maca i interessant per a l'estudi de problemes de l'obstacle ve de la teoria de la probabilitat i la matemàtica financera. En particular, apareixen en modelar els preus de les opcions americanes. A continuació ho veurem amb més detall.

Recordem que una opció americana consisteix a donar al propietari la possibilitat de comprar un cert actiu a un preu fixat en qualsevol moment abans de la data de venciment. En el model de Black-Scholes, el preu (logarítmic) d'aquest actiu X_t es modela com un procés de Wiener (o moviment brownià) amb un paràmetre de transport (*drift*) que recrea el creixement a llarg termini i un paràmetre de variància que coincideix amb la volatilitat de l'actiu. Sota aquesta hipòtesi, tal com hem dit a la subsecció 1.2, el preu racional de l'opció és solució d'un problema de l'obstacle parabòlic com a (2). Tot i així, en finances, les fluctuacions de preus sovint es poden modelar millor amb processos estocàstics X_t més generals: els processos de Lévy (vegeu, per exemple, [18]). Són processos estocàstics amb salts, i van ser introduïts en models de preus d'opcions pel premi Nobel R. C. Merton cap al 1970, vegeu [45].

Sota aquesta hipòtesi més general, el preu racional d'una opció americana encara és solució d'un problema de l'obstacle semblant a (2), però on el laplacià Δ és reemplaçat per un altre operador (de fet, l'anomenat *generador infinitesimal del procés X_t* , que és un operador el·líptic de tipus integrodiferencial). L'exemple més canònic i important de procés de Lévy (a banda del moviment brownià) correspon al cas en el qual la distribució de X_t és rotacio-

nalment simètrica i compleix una propietat de reescalament. En aquest cas, el que obtenim és el problema de l'obstacle per al *laplacà fraccionari*

$$(-\Delta)^s u(x) := c_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x) - u(x+y)}{|y|^{n+2s}} dy,$$

amb $s \in (0, 1)$.

El problema de l'obstacle per a aquest operador s'anomena usualment el *problema de l'obstacle fraccionari*. Degut a la seva connexió amb la teoria de la probabilitat i la matemàtica financera, durant l'última dècada s'han dedicat esforços considerables a entendre'l millor (en la seva versió estacionària, i també amb la variable en el temps).

5.2 Resultats coneguts

Les principals preguntes en aquest context són:

- Quina és la regularitat òptima de les solucions?
- Es pot demostrar regularitat de les fronteres lliures?

Els primers resultats en aquesta direcció els va obtenir Silvestre a [56] en el cas estacionari, on va demostrar la regularitat quasiòptima de les solucions, $u \in C^{1,s-\varepsilon}$ per a tot $\varepsilon > 0$.⁵ La regularitat òptima va ser establerta més tard per Caffarelli, Salsa i Silvestre [15]:

Les solucions u són $C^{1,s}$.

A més, també van demostrar el següent:

Les fronteres lliures són regulars, fora d'un cert conjunt de punts degenerats.

Més concretament, van demostrar que, si u resol el problema de l'obstacle per al laplacà fraccionari $(-\Delta)^s$ a $\mathbb{R}^n$, aleshores $u \in C^{1,s}$, i per a cada punt de la frontera lliure x_0 es té la dicotomia següent: o bé la solució u és degenerada a x_0 , o bé la frontera lliure és regular en un entorn de x_0 .

Després dels resultats de [15], se n'han establert molts més per al problema de l'obstacle fraccionari (estacionari): la regularitat C^∞ del conjunt de punts regulars [41, 19, 42, 38], l'estudi dels punts degenerats o singulars [34, 4, 31, 36, 22, 32], el cas d'operadors amb transport (*drift*) [47, 35, 23] o l'estudi de problemes de l'obstacle per a operadors de Lévy més generals [13, 1].

Més recentment, Fernández-Real i el primer autor han estudiat la regularitat genèrica per a aquest problema [24], i han demostrat que:

Genèricament, els punts degenerats tenen mesura zero dins la frontera lliure.

⁵ Aquí, denotem $C^{1,\alpha}$ amb $\alpha \in (0, 1]$ l'espai de Hölder d'ordre $1 + \alpha$. És l'espai de funcions $w \in C^1$ tals que $|\nabla w(x) - \nabla w(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ per a alguna constant M independent de x, y . Noteu que aquests espais compleixen $C^2 \subset C^{1,\alpha} \subset C^1$. Per exemple, la funció $|x|^{1+\alpha}$ és $C^{1,\alpha}$ però no C^2 .

Tot i la gran varietat de resultats per al problema de l'obstacle fraccionari, hi havia una qüestió de la qual sabíem molt menys: què passa en el context evolucionari quan afegim la variable en el temps?

5.3 El cas parabòlic

El primer resultat en aquesta direcció va ser establert per Caffarelli i Figalli a [10], on van demostrar la regularitat òptima de les solucions:

TEOREMA 5 ([10]). *Sigui $u(x, t)$ una solució del problema de l'obstacle fraccionari parabòlic.*

Aleshores, u és $C^{1,s}$ en x .

La qüestió de la regularitat de les fronteres lliures va seguir oberta durant alguns anys. La principal dificultat aquí era que en el context estacionari les demostracions es basen molt fortament en determinades fórmules de monotonia que semblen no existir en el context parabòlic. Per tant, s'havia de desenvolupar un argument completament diferent.

Això va ser dut a terme a [5], on Barrios, Figalli i el primer autor van demostrar el següent:

TEOREMA 6 ([5]). *Sigui $s > \frac{1}{2}$, i sigui $u(x, t)$ una solució del problema de l'obstacle fraccionari parabòlic.*

Aleshores, la frontera lliure és regular, fora d'un cert conjunt de punts degenerats.

Aquest teorema estenia per primera vegada els resultats de [15] al cas parabòlic, i amb una demostració completament diferent.

6 Alguns problemes oberts

Voldríem tancar aquest article amb alguns comentaris finals i una menció a alguns problemes que queden oberts després dels resultats recents presentats en les seccions anteriors.

En primer lloc, és natural preguntar-se si els mètodes de [29] desenvolupats per demostrar el teorema 2 es podrien adaptar per tractar altres problemes de frontera lliure o fluxos geomètrics. Per exemple, és possible millorar les estimacions per al conjunt de temps singulars obtingudes per White [64] per al flux per curvatura mitjana?⁶

D'altra banda, les qüestions de regularitat genèrica són extremament delicades, i moltes romanen obertes. Per exemple, creiem que dos reptes importants en aquest context són els següents: primer, és certa la conjectura de Schaeffer en dimensió arbitrària $n \geq 5$?; segon, és possible demostrar un resultat de regularitat genèrica per al problema de Stefan que millori les estimacions per a solucions arbitràries obtingudes a [29]? Creiem que els mètodes actuals estan

⁶ El flux per curvatura mitjana és l'evolució d'una superfície donada de manera que la component normal de la velocitat a la que es mou la superfície ve donada per la seva curvatura mitjana.

lluny de poder contestar les preguntes anteriors, i, per tant, ens queda molt per entendre completament aquests problemes oberts.

Finalment, en el context del problema de l'obstacle fraccionari, fins i tot algunes preguntes ben bàsiques segueixen encara sense resposta. Per exemple, pel que fa al teorema 6 sobre la regularitat de la frontera lliure per al problema de l'obstacle fraccionari parabòlic, és possible demostrar-lo també per als casos $s = \frac{1}{2}$ i $s < \frac{1}{2}$? I què es pot dir del conjunt singular en aquest context?

Els lectors interessats poden trobar més informació sobre aquests temes, així com més detalls i demostracions, als articles [26, 50] i al llibre [25].

Agraïments

Els autors han rebut finançament de l'European Research Council sota els Grant Agreements número 801867 (XR) i número 721675 (JS). També han rebut finançament del Swiss NSF sota el projecte número 178795 (XR) i el projecte Ambizione PZ00P2 180042 (JS). Finalment, els autors també han rebut finançament del projecte MINECO MTM2017-84214-C2-1-P, i de la Fundació BBVA a través dels projectes associats als premis J. L. Rubio de Francia 2017 (XR) i 2019 (JS).

Referències

- [1] ABATANGELO, N.; ROS-OTON, X. «Obstacle problems for integro-differential operators: higher regularity of free boundaries». *Adv. Math.*, 360 (2020), 106931, 61 p.
- [2] ALMGREN, F. J., JR. *Almgren's Big Regularity Paper*. *Q-valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of area-minimizing rectifiable currents up to codimension 2*. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., Inc., 2000. (World Scientific Monograph Series in Mathematics; 1) [Amb un prefaci de Jean E. Taylor i Vladimir Scheffer]
- [3] BAIOCCHI, C. «Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media». A: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Vancouver, 1974, Section 13, 237–245. L'original es pot trobar a <https://www.mathunion.org/fileadmin/ICM/Proceedings/ICM1974.2/ICM1974.2.ocr.pdf>.
- [4] BARRIOS, B.; FIGALLI, A.; ROS-OTON, X. «Global regularity for the free boundary in the obstacle problem for the fractional Laplacian». *Amer. J. Math.*, 140 (2) (2018), 415–447.
- [5] BARRIOS, B.; FIGALLI, A.; ROS-OTON, X. «Free boundary regularity in the parabolic fractional obstacle problem». *Comm. Pure Appl. Math.*, 71 (10) (2018), 2129–2159.
- [6] BLANCHET, A. «On the singular set of the parabolic obstacle problem». *J. Differential Equations*, 231 (2) (2006), 656–672.

- [7] CAFFARELLI, L. A. «The regularity of free boundaries in higher dimensions». *Acta Math.*, 139 (3-4) (1977), 155-184.
- [8] CAFFARELLI, L. A. «Compactness methods in free boundary problems». *Comm. Partial Differential Equations*, 5 (4) (1980), 427-448.
- [9] CAFFARELLI, L. A. «The obstacle problem revisited». *J. Fourier Anal. Appl.*, 4 (4-5) (1998), 383-402.
- [10] CAFFARELLI, L.; FIGALLI, A. «Regularity of solutions to the parabolic fractional obstacle problem». *J. Reine Angew. Math.*, 680 (2013), 191-233.
- [11] CAFFARELLI, L.; KOHN, R.; NIRENBERG, L. «Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations». *Comm. Pure Appl. Math.*, 35 (6) (1982), 771-831.
- [12] CAFFARELLI, L. A.; RIVIÈRE, N. M. «Asymptotic behaviour of free boundaries at their singular points». *Ann. of Math. (2)*, 106 (2) (1977), 309-317.
- [13] CAFFARELLI, L.; ROS-OTON, X.; SERRA, J. «Obstacle problems for integro-differential operators: regularity of solutions and free boundaries». *Invent. Math.*, 208 (3) (2017), 1155-1211.
- [14] CAFFARELLI, L.; SALSA, S. *A Geometric Approach to Free Boundary Problems*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2005. (Graduate Studies in Mathematics; 68)
- [15] CAFFARELLI, L. A.; SALSA, S.; SILVESTRE, L. «Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian». *Invent. Math.*, 171 (2) (2008), 425-461.
- [16] CARRILLO, J. A.; DELGADINO, M. G.; MELLET, A. «Regularity of local minimizers of the interaction energy via obstacle problems». *Comm. Math. Phys.*, 343 (3) (2016), 747-781.
- [17] COLOMBO, M.; SPOLAOR, L.; VELICHKOV, B. «A logarithmic isoperimetric inequality for the obstacle problem». *Geom. Funct. Anal.*, 28 (4) (2018), 1029-1061.
- [18] CONT, R.; TANKOV, P. *Financial Modelling with Jump Processes*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004. (Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series)
- [19] DE SILVA, D.; SAVIN, O. «Boundary Harnack estimates in slit domains and applications to thin free boundary problems». *Rev. Mat. Iberoam.*, 32 (3) (2016), 891-912.
- [20] DUVAUT, G. «Résolution d'un problème de Stefan (fusion d'un bloc de glace à zéro degré)». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 276 (1973), A1461-A1463.
- [21] DUVAUT, G.; LIONS, J.-L. *Inequalities in Mechanics and Physics*. Berlin; Nova York: Springer-Verlag, 1976. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 219) [Traduït del francès per C. W. John]
- [22] FERNÁNDEZ-REAL, X.; JHAVERI, Y. «On the singular set in the thin obstacle problem: higher order blow-ups and the very thin obstacle problem». *Anal. PDE*. [En premsa]

- [23] FERNÁNDEZ-REAL, X.; ROS-OTON, X. «The obstacle problem for the fractional Laplacian with critical drift». *Math. Ann.*, 371 (3–4) (2018), 1683–1735.
- [24] FERNÁNDEZ-REAL, X.; ROS-OTON, X. «Free boundary regularity for almost every solution to the Signorini problem». Preprint, 2019. arXiv:1912.02438.
- [25] FERNÁNDEZ-REAL, X.; ROS-OTON, X. *Regularity Theory for Elliptic PDE*. Llibre en preparació, 2020. [Versió preliminar disponible a la pàgina web dels autors: <https://www.ub.edu/pde/xros/Llibre-ellipticPDE.pdf>]
- [26] FIGALLI, A. «Free boundary regularity in obstacle problems». *Journées EDP* (2018), 1–24.
- [27] FIGALLI, A. «Regularity of interfaces in phase transitions via obstacle problems—Fields Medal lecture». A: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018*. Vol. I. *Plenary lectures*. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2018, 225–247.
- [28] FIGALLI, A.; ROS-OTON, X.; SERRA, J. «Generic regularity of free boundaries for the obstacle problem». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2020). <https://doi.org/10.1007/s10240-020-00119-9>.
- [29] FIGALLI, A.; ROS-OTON, X.; SERRA, J. «The singular set in the Stefan problem». Preprint, 2020.
- [30] FIGALLI, A.; SERRA, J. «On the fine structure of the free boundary for the classical obstacle problem». *Invent. Math.*, 215 (1) (2019), 311–366.
- [31] FOCARDI, M.; SPADARO, E. «On the measure and the structure of the free boundary of the lower dimensional obstacle problem». *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 230 (1) (2018), 125–184.
- [32] FOCARDI, M.; SPADARO, E. «The local structure of the free boundary in the fractional obstacle problem». Preprint, 2019. arXiv:1903.05909.
- [33] FRIEDMAN, A. *Variational Principles and Free-Boundary Problems*. Nova York: John Wiley & Sons, Inc., 1982. (Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts)
- [34] GAROFALO, N.; PETROSYAN, A. «Some new monotonicity formulas and the singular set in the lower dimensional obstacle problem». *Invent. Math.*, 177 (2) (2009), 415–461.
- [35] GAROFALO, N.; PETROSYAN, A.; POP, C. A.; SMIT VEGA GARCIA, M. «Regularity of the free boundary for the obstacle problem for the fractional Laplacian with drift». *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 34 (3) (2017), 533–570.
- [36] GAROFALO, N.; ROS-OTON, X. «Structure and regularity of the singular set in the obstacle problem for the fractional Laplacian». *Rev. Mat. Iberoam.*, 35 (5) (2019), 1309–1365.
- [37] GIUSTI, E. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Basilea: Birkhäuser Verlag, 1984. (Monographs in Mathematics; 80)

- [38] JHAVERI, Y.; NEUMAYER, R. «Higher regularity of the free boundary in the obstacle problem for the fractional Laplacian». *Adv. Math.*, 311 (2017), 748–795.
- [39] KINDERLEHRER, D.; NIRENBERG, L. «Regularity in free boundary problems». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 4 (2) (1977), 373–391.
- [40] KINDERLEHRER, D.; STAMPACCHIA, G. *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*. Nova York; Londres: Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 1980. (Pure and Applied Mathematics; 88)
- [41] KOCH, H.; PETROSYAN, A.; SHI, W. «Higher regularity of the free boundary in the elliptic Signorini problem». *Nonlinear Anal.*, 126 (2015), 3–44.
- [42] KOCH, H.; RÜLAND, A.; SHI, W. «Higher regularity for the fractional thin obstacle problem». *New York J. Math.*, 25 (2019), 745–838.
- [43] LAMÉ, G.; CLAPEYRON, B. P. «Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide». *Ann. Chimie Physique*, 47 (1831), 250–256.
- [44] LINDGREN, E.; MONNEAU, R. «Pointwise regularity of the free boundary for the parabolic obstacle problem». *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 54 (1) (2015), 299–347.
- [45] MERTON, R. C. «Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous». *J. Financ. Econ.*, 5 (1976), 125–144.
- [46] MONNEAU, R. «On the number of singularities for the obstacle problem in two dimensions». *J. Geom. Anal.*, 13 (2) (2003), 359–389.
- [47] PETROSYAN, A.; POP, C. A. «Optimal regularity of solutions to the obstacle problem for the fractional Laplacian with drift». *J. Funct. Anal.*, 268 (2) (2015), 417–472.
- [48] PETROSYAN, A.; SHAHGHOLIAN, H.; URALTSEVA, N. *Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2012. (Graduate Studies in Mathematics; 136)
- [49] RODRIGUES, J.-F. *Obstacle Problems in Mathematical Physics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1987. (North-Holland Mathematics Studies; 134. Notas de Matemática; 114)
- [50] ROS-OTON, X. «Obstacle problems and free boundaries: an overview». *SeMA J.*, 75 (3) (2018), 399–419.
- [51] ROS-OTON, X.; SERRA, J. «Understanding singularities in free boundary problems». *Mat. Cult. Soc. Riv. Unione Mat. Ital. (I)*, 4 (2) (2019), 107–118.
- [52] SAKAI, M. «Regularity of a boundary having a Schwarz function». *Acta Math.*, 166 (3–4) (1991), 263–297.
- [53] SAKAI, M. «Regularity of free boundaries in two dimensions». *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 20 (3) (1993), 323–339.
- [54] SCHAEFFER, D. G. «An example of generic regularity for a non-linear elliptic equation». *Arch. Rational Mech. Anal.*, 57 (1975), 134–141.

- [55] SERFATY, S. *Coulomb Gases and Ginzburg-Landau Vortices*. Zurich: European Mathematical Society (EMS), 2015. (Zurich Lectures in Advanced Mathematics)
- [56] SILVESTRE, L. «Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator». *Comm. Pure Appl. Math.*, 60 (1) (2007), 67–112.
- [57] SIMONS, J. «Minimal varieties in riemannian manifolds». *Ann. of Math. (2)*, 88 (1968), 62–105.
- [58] SMALE, N. «Generic regularity of homologically area minimizing hypersurfaces in eight-dimensional manifolds». *Comm. Anal. Geom.*, 1 (2) (1993), 217–228.
- [59] STEFAN, J. «Ueber einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung», *Sitzungsberichte der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien*, 98 (1889), 473–484.
- [60] STEFAN, J. «Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere ueber die Eisbildung im Polarmeere», *Ann. Physik Chemie*, 42 (1891), 269–286.
- [61] TAO, T. «Perelman's proof of the Poincaré conjecture: a nonlinear PDE perspective». Preprint, 2006. arXiv:math/0610903.
- [62] WEISS, G. S. «A homogeneity improvement approach to the obstacle problem». *Invent. Math.*, 138 (1) (1999), 23–50.
- [63] WEISS, G. S. «Self-similar blow-up and Hausdorff dimension estimates for a class of parabolic free boundary problems». *SIAM J. Math. Anal.*, 30 (3) (1999), 623–644.
- [64] WHITE, B. «The size of the singular set in mean curvature flow of mean-convex sets». *J. Amer. Math. Soc.*, 13 (3) (2000), 665–695.

XAVIER ROS-OTON
 INSTITUT FÜR MATHEMATIK
 UNIVERSITÄT ZÜRICH
 8057 ZÜRICH, SWITZERLAND
 INSTITUCIÓ CATALANA DE RECERCA I ESTUDIS AVANÇATS (ICREA)
 08010 BARCELONA, SPAIN
 DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES I INFORMÀTICA
 UNIVERSITAT DE BARCELONA
 08007 BARCELONA, SPAIN
 xavier.ros-oton@math.uzh.ch

JOAQUIM SERRA
 DEPARTMENT OF MATHEMATICS
 ETH ZÜRICH
 8092 ZÜRICH, SWITZERLAND
 joaquim.serra@math.ethz.ch

English summaries

Joana Cirici

Contributions of Maryam Mirzakhani in geometry and dynamics

We will explore the world of Riemann surfaces, hyperbolic metrics, and geodesic curves to explore some of Maryam Mirzakhani's work that surprisingly combines concepts of dynamics and geometry. We will see how to count geodesics on surfaces using moduli spaces and how to address problems in billiard dynamics by studying geodesic curves on surfaces. We will also review some of Mirzakhani's latest discoveries, such as the Magic Wand Theorem, considered by some the theorem of the decade.

Keywords: Maryam Mirzakhani, Riemann surfaces, moduli spaces, hyperbolic metrics, geodesic curves, billiard dynamics.

MSC2010 Subject Classification: 01A70, 32G15.

Josep Pla i Carrera

Methodological and historical reading of the work Ḥibbur ha-mēšīḥá wē-ha-tišboret (Treatise on geometry and measurement) by Abraham Bar Ḥiyya (Savasorda)

On the occasion of the centenary of the birth of Josep Millàs Vallicrosa, I thought that, as a mathematician, it would be good to perform an analysis of the *Treatise on Geometry and Measurement* (1116) by Abraham Bar Ḥiyya (Savasorda) that the famous Arabist-Hebrewist had translated into Catalan. This work shows that in the West, before Fibonacci's *Liber Abaci* (1202), written in

Latin, a booklet had been published in Hebrew in which the quadratic equation and its solving algorithms were introduced, based on the relations in Book II of Euclid's *Elements*. In addition, this booklet had a second part dedicated to the division of figures, using, however, geometric methods. Fibonacci, aware of the methodological difference between these two parts, addressed the question of the division of figures inherited from Greek mathematics in a separate treatise, *The Practica Geometriæ* (1220).

Keywords: second degree equations in the West, history of medieval Jewish mathematics, Savasorda and Fibonacci.

MSC2010 Subject Classification: 01-01, 01A35, 01A99.

Xavier Ros-Oton and Joaquim Serra

Regularity and singularities in free boundary problems

Free boundary problems are those described by PDEs that exhibit a priori unknown (free) interfaces or boundaries. The most classical example is the melting of ice to water (the Stefan problem). In this case, the free boundary is the liquid-solid interface between ice and water.

A central mathematical challenge in this context is to understand the regularity and singularities of free boundaries. In this paper we provide an introduction to this topic by presenting some recent results by Alessio Figalli and the authors.

Keywords: free boundary problem, singularities, Stefan problem.

MSC2010 Subject Classification: 35R35.

Instruccions per als autors

Els articles sotmesos a publicació s'han d'enviar als editors o a qualsevol membre del comitè editorial per correu electrònic, preferentment en format PDF. Els originals han de contenir la versió anglesa del títol, un resum breu en català i en anglès, paraules clau en català i en anglès i els codis de la classificació per matèries MSC2010.

Les versions definitives dels articles acceptats s'han de presentar en codi $\text{\TeX}$, preferentment en l'estil $\text{\LaTeX}$ propi del BUTLLETÍ. Aquest estil es pot obtenir a les pàgines web de la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM). Fem notar que en aquesta publicació s'utilitza preferentment el punt per a separar decimals, en lloc de la coma recomanada per l'IEC, per a poder facilitar la comprensió de les expressions matemàtiques. Per tal d'accelerar el procés de producció, es prega als autors que segueixin les indicacions contingudes en el document d'exemple.

La versió en paper del BUTLLETÍ s'imprimeix en blanc i negre. Quan un article contingui figures en color i es consideri convenient, l'autor proporcionarà una versió dels gràfics substituint el color per tons de grisos i línies de gruix variable. Així mateix, modificarà els comentaris que facin referència al color de les figures. En qualsevol cas, el BUTLLETÍ publicarà l'original en color en el seu format electrònic.

La propietat intel·lectual dels articles és dels respectius autors.

Els autors, en el moment de lliurar els articles al BUTLLETÍ per a sol·licitar-ne la publicació, accepten els termes següents:

- Els autors cedeixen a la SCM (filial de l'Institut d'Estudis Catalans) els drets de reproducció, comunicació pública i distribució dels articles presentats per a ser publicats al BUTLLETÍ.

- Els autors responen davant la SCM de l'autoria i l'originalitat dels articles presentats.

- És responsabilitat dels autors l'obtenció dels permisos per a la reproducció de tot el material gràfic inclòs en els articles.

- La SCM està exempta de tota responsabilitat derivada de l'eventual vulneració de drets de propietat intel·lectual per part dels autors.

Cada autor rebrà una còpia en PDF d'alta qualitat de la versió digital del seu article i un exemplar imprès del número del BUTLLETÍ en el qual es publiqui.

La correspondència administrativa relacionada amb el BUTLLETÍ s'ha d'adreçar a la SCM.

Pel que fa a la protecció de dades personals, l'Institut d'Estudis Catalans (IEC) compleix el que estableix el Reglament general de protecció de dades de la Unió Europea (Reglament 2016/679, del 27 d'abril de 2016). De conformitat amb aquesta norma, s'informa que, amb l'acceptació de les normes de publicació, els autors autoritzen que les seves dades personals (nom i cognoms, dades de contacte i dades de filiació) puguin ser publicades en el corresponent volum del BUTLLETÍ.

Aquestes dades seran incorporades a un tractament que és responsabilitat de l'IEC amb la finalitat de gestionar aquesta publicació. Únicament s'utilitzaran les dades dels autors per a gestionar la publicació del BUTLLETÍ i no seran cedides a tercers, ni es produiran transferències a tercers països o organitzacions internacionals. Un cop publicat el BUTLLETÍ, aquestes dades es conservaran com a part del registre històric d'autors. Els autors poden exercir els drets d'accés, rectificació, supressió, oposició, limitació en el tractament i portabilitat, adreçant-se per escrit a l'Institut d'Estudis Catalans (carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona), o bé enviant un correu electrònic a l'adreça dades.personals@iec.cat, en què s'especifiqui de quina publicació es tracta.

Comitè editorial

Antoni Guillamon (editor en cap)
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
antoni.guillamon@upc.edu

Carme Cascante
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
cascante@ub.edu

Bartomeu Coll
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
tomeu.coll@uib.cat

Núria Fagella
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
fagella@maia.ub.es

Armengol Gasull
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
gasull@mat.uab.cat

Gábor Lugosi
ICREA i Departament d'Economia
Universitat Pompeu Fabra
gabor.lugosi@upf.edu

Rosa Camps (editora adjunta)
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
rcamps@mat.uab.cat

Marc Noy
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
marc.noy@upc.edu

Francesc Planas
Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
francesc.planas@upc.edu

Joan Saldaña
Dep. d'Informàtica, Mat. Aplicada i Estadística
Universitat de Girona
joan.saldana@udg.edu

Marta Sanz-Solé
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona
marta.sanz@ub.edu

Gil Solanes
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
solanes@mat.uab.cat



Societat Catalana de Matemàtiques

La **Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)** és una societat filial de l'Institut d'Estudis Catalans, que continua les activitats de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències, que fou fundada per l'Institut l'any 1931. Les finalitats de la **SCM** són: el conreu de les ciències matemàtiques, l'extensió del seu coneixement en la societat catalana, el foment del seu ensenyament i de la seva investigació teòrica i aplicada, així com la publicació de tota mena de treballs que s'adeqüin a aquests objectius. La **SCM** desenvolupa les seves activitats en les terres de llengua i cultura catalanes. El català és, doncs, la llengua pròpia de la **SCM** i la que és usada normalment en tots els seus actes i publicacions.

La **SCM** edita les publicacions periòdiques *SCM/Notícies* i *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*. Els socis de la **SCM** reben, gratuïtament, aquestes dues publicacions.

La **SCM** té convenis de reciprocitat amb diverses societats matemàtiques d'arreu del món, mitjançant els quals els socis de la **SCM** obtenen una reducció en la quota de soci d'aquestes societats. Així mateix, els socis de la **SCM** poden fer-se socis de la Societat Matemàtica Europea pagant una quota complementària.

La Junta Directiva de la **SCM** està constituïda per les persones següents:

PRESIDENTA: Dolors Herbera i Espinal

VICEPRESIDENT: Josep Vives i Santa-Eulàlia

ADJUNT A LA VICEPRESIDÈNCIA: Abraham de la Fuente Pérez

SECRETÀRIA: Immaculada Baldomà i Barraca

TRESORER: Albert Granados i Corsellas

VOCAL EMPRESA: Aleix Ruiz de Villa

VOCAL PUBLICACIONS: Montserrat Alsina i Aubach

VOCALS: Josep Grané i Manlleu, Mireia Lopez i Beltran, Albert Ruiz i Cirera, Manel Udina i Abelló

DELEGADA DE L'IEC: Pilar Bayer i Isant

L'adreça de la **SCM** és carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona. Telèfon: 933 248 583. Fax: 932 701 180. Correu electrònic: scm@iec.cat. Adreça web: <http://scm.iec.cat>.

El Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques publica, en llengua catalana, exposicions matemàtiques de qualitat, que puguin interessar a un nombre elevat de lectors. Es donarà prioritat a aquells treballs en què destaquin la claredat d'exposició i l'interès general del tema. El Butlletí està obert a tots els camps de la matemàtica i també als aspectes matemàtics de les ciències experimentals, la tecnologia, l'economia, etc., així com a altres àrees, com la història, la didàctica i la filosofia, sempre que els treballs tinguin un component matemàtic important. També tenen cabuda al Butlletí aquells articles que desenvolupin un aspecte significatiu de la problemàtica de la professió matemàtica al nostre país.

El Butlletí publica un volum a l'any, dividit en dos números, que es trameten gratuïtament a tots els socis. El Butlletí es publica també en format electrònic. L'edició electrònica del Butlletí pot obtenir-se des del portal de revistes científiques en línia de l'IEC o al servidor <http://scm.iec.cat>.

La correspondència administrativa s'ha d'adreçar a la Societat Catalana de Matemàtiques.

Editor en cap _____

Antoni Guillamon

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

Editora adjunta _____

Rosa Camps

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Comitè editorial _____

Carne Cascante

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Marc Noy

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

Bartomeu Coll

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de les Illes Balears

Francesc Planas

Departament de Matemàtiques

Universitat Politècnica de Catalunya

Núria Fagella

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Joan Saldaña

Dep. d'Informàtica, Mat. Aplicada i Estadística

Universitat de Girona

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Marta Sanz-Solé

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de Barcelona

Gábor Lugosi

ICREA i Departament d'Economia

Universitat Pompeu Fabra

Gil Solanes

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Societat Catalana de Matemàtiques

Carrer del Carne, 47 - 08001 Barcelona

tel. 933 248 583 - fax 932 701 180

scm@iec.cat - <http://scm.iec.cat>